MPSI1 – Programme de colles

Semaine 19 – du 4 au 8 mars 2024

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et fractions rationnelles. Il s'agit d'objets particulièrement riches, dont l'étude interagit avec beaucoup de thèmes abordés pendant le semestre. Par exemple :

- l'étude des équations algébriques enrichit le calcul algébrique et suggère des problèmes de localisation des racines, mettant en jeu des techniques analytiques dans le cas réel, plus géométriques dans le cas complexe ;
- l'interpolation de Lagrange permet de reconstituer un polynôme en fonction de ses valeurs en suffisamment de points et donne lieu à des problèmes issus de la théorie de l'approximation (majoration de l'erreur d'interpolation).

L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$, ce qui autorise un exposé allégé. Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau $\mathbb{K}[X]$.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.
Degré d'une somme, d'un produit.
Composition.

La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

b) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.
Théorème de la division euclidienne.

Algorithme de la division euclidienne.

c) Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
Multiplicité d'une racine.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).

Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».
Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.

d) Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.
Formule de Taylor polynomiale.
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.
Algorithme d'Euclide.

Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B .
L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.

Relation de Bézout.

PPCM.

Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.

PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout.

Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Notation $A \vee B$.

Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

La démonstration est hors programme.

Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.

Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.

Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

g) Formule d'interpolation de Lagrange

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i .

Expression de P .

Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i .

Organisation de la colle

- Cours et exercices sur les polynômes.
- Pour les exercices, moins insister, en début de semaine, sur l'interpolation de Lagrange et l'arithmétique (notions + fraîches)

Exemples de questions de cours

1. Factorisation par $X - \alpha$ quand α est racine.
2. Division euclidienne.
3. Formules de Viète : énoncé, illustration, application à la somme et au produit des racines de l'unité.
4. Dérivée d'une somme/d'un produit/d'une composée.
5. Caractérisation de la multiplicité avec les dérivées.
6. Formule de Taylor.
7. Relation de Bézout pour les polynômes.
8. Expression de la divisibilité, du pgcd, ppcm pour des polynômes scindés. Condition pour être srs portant sur P et P' .
9. Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
10. Expression de la décomposition en produits d'irréductibles dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$. Explication pour le passage de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ (mais pas de preuve d'unicité).
11. Existence et unicité de la base d'interpolation de Lagrange.
12. Existence et unicité du polynôme interpolateur de Lagrange.
13. Détermination de tous les polynômes tels que $P(x_i) = y_i$ (si $(x_0, \dots, x_n)$ sont $n + 1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $(y_0, \dots, y_n)$ $n + 1$ éléments de $\mathbb{K}$)
14. Décomposition d'un polynôme sur la base de Lagrange.