DM 12
Pour le lundi 26 février

Formules possibles. À la carte, avec **trois conditions seulement** :

- **tout le monde** doit faire au moins la **partie A du problème 1**,
- quand on commence une partie, **on va au bout**,
- enfin, **indiquez en début de copie** les parties que vous avez faites (par exemple « j'ai fait P1-A et P2-A/B/C »). Je noterai en fonction de votre « engagement » de début de devoir.

Vous pouvez déposer votre DM jusqu'au **dimanche 25 février, 18h**, sur cahier-de-prépa, rubrique « Transferts de documents », en **format pdf** (utilisez des applications du genre CamScanner), de taille inférieure à 10 Mo. Vous pouvez aussi les déposer en version papier le lundi matin sur le bureau.

Problème 1. Équivalent de Stirling

A. Formule de Moivre

Nous allons établir dans cette partie qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$. Notre but va être de montrer que (u_n) tend vers une limite non nulle.

1. Posons, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Calculer v_n pour tout entier naturel n.

Correction

Par le calcul, on trouve $v_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - 1$.

2. En rappelant le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$, montrer que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Correction

On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. Or, $\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. En revenant à la définition de o, montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang.

Correction

Par l'expression précédente, on dispose d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, telle que
$$v_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$
On sait que $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait
$$-\frac{1}{12} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{12}.$$
Soit alors $n \geqslant N$. On a $-\frac{1}{12} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{12}$, donc $-\frac{1}{12n^2} \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^2} \leqslant \frac{1}{12n^2}$, donc
$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{6n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \text{ d'où le résultat.}$$

Convergence de la série des (v_n). On pose pour n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

4. Montrer que (S_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Correction

Soit $n \geqslant N$. Alors $S_{n+1} - S_n = v_{n+1} \geqslant 0$, car $n+1 \geqslant N$. Donc (S_n) est croissante à partir du rang N.

5. En montrant que pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que (S_n) est bornée. En déduire que (S_n) converge.

Correction

Soit k un entier naturel non nul. Remarquons que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

On sait que $k \leqslant k+1$, donc $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k}$, donc
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)}, \text{ i.e. } \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
D'où le résultat.

Maintenant, bornons S_n. Soit $n \geqslant N$. Alors, par l'inégalité triangulaire,
$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} v_k\right| \leqslant |S_N| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} v_k\right|.$$
Or, pour $k \geqslant N+1$, $0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{k^2}$, donc
$$\left|\sum_{k=N+1}^{n} v_k\right| = \sum_{k=N+1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Par l'inégalité $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, réécrite en $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, on a

$$\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{N} - \frac{1}{n} \leqslant 2,$$

par télescopage. Donc pour tout $n \geqslant N$, $|S_n| \leqslant |S_N| + 2$, donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|S_n| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |S_N| + 2$. Donc (S_n) est bornée.

6. Déduire des questions précédentes que u_n converge vers une limite non nulle, nommons-là C.

Correction

(S_n) est croissante et majorée, donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite réelle ℓ. Or, par télescopage, pour tout n non nul, $S_n = \ln\left(\dfrac{u_1}{u_{n+1}}\right)$. Donc $\dfrac{u_1}{u_{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell}$, i.e. $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u_1 \mathrm{e}^{-\ell}$, i.e. $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u_1 \mathrm{e}^{-\ell}$, qui est une limite non nulle car $u_1 \neq 0$.

B. Détermination de la constante à l'aide des intégrales de Wallis

On définit, pour tout entier naturel n, l'intégrale $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer par une intégration par parties que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, et en déduire, pour tout entier p,

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

Correction

IPP et récurrence corrigées dans un DM précédent.

Équivalent de W_n.

8. En utilisant la relation de récurrence trouvée précédemment, montrer que $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

Correction

On sait que pour tout entier naturel n, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. W_n est strictement positive par les formules trouvées question précédente. Donc

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Donc $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

9. Montrer que pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

Correction

Pour tout x dans $[0, \pi/2]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc pour tout n dans n, $0 \leqslant \sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$. En intégrant les inégalités entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Autrement dit la suite (W_n) est décroissante. Donc pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Par stricte positivité de W_n, $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. Or, $\frac{W_{n+2}}{W_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{+infty}{\longrightarrow} 1$.

10. Montrer que la suite $\big((n+1)W_nW_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et déterminer sa valeur.

Correction

Pour tout entier naturel n, posons $a_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$a_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = a_n,$$

par la relation de récurrence trouvée en question h. Donc (a_n) est constante, égale à $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

11. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Correction

On en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$. Or, $a_n = (n+1)W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2$ car $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$ donc $nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

12. Démontrer que la constante C définie dans la première section est égale à $\sqrt{2\pi}$. On a donc démontré que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Correction

On sait que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, donc

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{C\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}}{2^{2p}\left(C\sqrt{p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2p}2^{2p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}}{C2^{2p}p\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2p}}\frac{1}{C}.$$

Mais $W_{2p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\times 2p}}$, donc $\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}}\dfrac{1}{C} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$, donc $C \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$, i.e., comme C est une constante, $C = \sqrt{2\pi}$.

Problème 2. Polynôme annulateur d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à coefficients complexes. Si $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_kX^k$, on définit l'évaluation de P en M par

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_kM^k, \text{ avec la convention } M^0 = \mathrm{I}_n.$$

Ainsi, si $P(X) = 2X^2 + 3X - 4$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P(A) = 2A^2 + 3A - 4\mathrm{I}_n$.
Un polynôme P est appelé polynôme annulateur de M si $P(M) = 0$ (matrice nulle).
On peut remarquer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, si P et Q sont deux polynômes, alors

$$(P+Q)(M) = P(M) + Q(M) \text{ et } (PQ)(M) = P(M) \times Q(M).$$

On rappelle donc que si P est un polynôme et M est une matrice, $P(M)$ est **une matrice**.

A. Propriétés générales

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de M, alors pour tout polynÔme Q, $Q \times P$ est un polynôme annulateur de M.

Correction

On suppose que P est un polynôme annulateur de M. Soit alors Q dans $\mathbb{C}[X]$. Alors $(QP)(M) = Q(M) \times P(M)$. Mais $P(M) = 0$, donc $(QP)(M) = Q(M) \times 0 = 0$.

2. Démontrer que si M admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) \neq 0$, alors M est inversible.

3. Démontrer que si M admet un polynôme annulateur de la forme X^k, où $k \in \mathbb{N}$, alors M n'est pas inversible.

B. Un exemple

On pose ici $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A.

Correction

Calculons $P(A)$:

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 + A - \mathrm{I}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0_3, \end{aligned}$$

donc P est bien un polynôme annulateur de A.

5. En déduire que A est inversible et donner l'expression des coefficients de son inverse.

Correction

On sait que $A^2 + A - 2\mathrm{I}_3 = 0$, donc $A(A + \mathrm{I}_3) = 2\mathrm{I}_3$, donc $AB = \mathrm{I}_3$ où $B = \frac{1}{2}(A + \mathrm{I}_3)$, donc A est inversible d'inverse $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer, pour n dans $\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par P (on ne demande pas le quotient).

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. On sait que le reste de la division de X^n par P est de degré 1, il est donc de la forme $aX+b$. On a donc

$$X^n = Q(X)(X^2+X-2)+aX+b.$$

Or, $X^2+X-2=(X-1)(X+2)$. En évaluant l'égalité précédente en 1, on obtient $1=a+b$. En l'évaluant en -2, on obtient $(-2)^n=-2a+b$. D'où $a=\frac{1}{3}\left(1-(-2)^n\right)$ et $b=\frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right)$. Donc le reste de la division euclidienne de X^n par X^2+X-2 est $\frac{1}{3}\left(1-(-2)^n\right)X+\frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right)$.

7. En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. On sait que

$$X^n = Q(X)P(X)+\frac{1}{3}\left(1-(-2)^n\right)X+\frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right),$$

donc

$$A^n = Q(A)P(A)+\frac{1}{3}\left(1-(-2)^n\right)A+\frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right)\mathrm{I}_3,$$

donc, comme $P(A)=0$,

$$\begin{aligned}
&A^n\\
&=\frac{1}{3}\left(1-(-2)^n\right)A+\frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right)\mathrm{I}_3\\
&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-2)^n-1 & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n\\ 1-(-2)^n & (-2)^n-1 & 1-(-2)^n\\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & (-2)^n-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+(-2)^n & 0 & 0\\ 0 & 2+(-2)^n & 0\\ 0 & 0 & 2+(-2)^n\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n\\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^{n+1} & 1-(-2)^n\\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^{n+1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

C. Matrice compagnon associée à un polynôme – théorème de Cayley-Hamilton

Si $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme **unitaire** (avec $(a_0, \dots, a_{n-1})$ des complexes), on définit la matrice compagnon associée à P par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

8. Si P est un polynôme unitaire de degré n $\mathbb{C}[X]$, si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines de P et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités, exprimer $\mathrm{Tr}(C_P)$ en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ et $m_1, \dots, m_r$.

Correction

D'après la définition, $\mathrm{Tr}(C_P) = -a_{d-1}$. Or, d'après les relations coefficients racines, $-a_{d-1}$ est la somme des racines de P, donc $\mathrm{Tr}(C_P) = m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r$.

9. Dans cette question seulement, $P(X) = X^3 - X^2 + X - 2$.

(i) Donner l'expression de $A = C_P$.

Correction

La matrice compagnon de P est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Calculer A^2, A^3 et vérifier que $P(A) = 0$.

Correction

On calcule alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$A^3 - A^2 + A - 2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Le but de la suite de la partie est de généraliser ce résultat, qui est un cas particulier du **théorème de Cayley-Hamilton** : pour tout polynôme P unitaire, $P(C_P) = 0$.

Soit P un polynôme unitaire, $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On pose $A = C_P$.

On définit pour k dans $[\![1, n]\!]$ le vecteur colonne à n lignes e_k comme $e_k = (\delta_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Ainsi, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans cette partie, on ne demande pas nécessairement un passage par l'écriture formelle des coefficients d'un produit : un calcul matriciel direct, s'il est mené explicitement et clairement, peut être bien plus parlant.

10. Donner la valeur de Ae_1, puis de $A^k e_1$ pour tout k dans $[\![0, n]\!]$.

Correction

On fait le calcul directement avec les matrices $n \times n$

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2.$$

On remarque que de même, $A^2 e_1 = Ae_2 = e_3$ et que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $A^k e_1 = e_{k+1}$. Ensuite,

$$A^n e_1 = Ae_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

11. Démontrer que $P(A)e_1 = 0$ (vecteur nul), i.e. que $\left(A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k\right) e_1 = 0$.

Correction

 nlaillet.math@gmail.com

On calcule

$$\begin{aligned}\left(A^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kA^k\right)e_1 &= A^ne_1+\sum_{k=0}^{n-1}a_kA^ke_1\\ &= \begin{pmatrix}-a_0\\-a_1\\-a_2\\\vdots\\-a_{n-1}\end{pmatrix}+a_0\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_{n-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-a_0\\-a_1\\-a_2\\\vdots\\-a_{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_0\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

12. En déduire que pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, $P(A)e_j=0$.

Correction

Si $j\in[\![1,n]\!]$, $e_j=A^j\times e_1$. Donc

$$\begin{aligned}P(A)e_j &= \left(A^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kA^k\right)e_j\\ &= \left(A^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kA^k\right)A^je_1\\ &= \left(A^{n+j}+\sum_{k=0}^{n-1}a_kA^{k+j}\right)e_1\\ &= A^j\left(A^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kA^k\right)e_1=A^jP(A)e_1=0.\end{aligned}$$

D'où le résultat ! (c'était infiniment plus simple que de refaire tous les calculs !)

13. Conclure que $P(A)\times \mathrm{I}_n=0$ puis que $P(A)=0$.

Correction

On remarque que la matrice I_n est la matrice $(e_1\ e_2\ \cdots\ e_n)$ (avec les vecteurs e_k accollés), donc $P(A)\mathrm{I}_n=(P(A)e_1\ P(A)e_2\ \cdots\ P(A)e_n)=(0\ 0\ \cdots\ 0)$. Donc $A\mathrm{I}_n=0$, donc, comme I_n est inversible, $A=0$.

D. Idéal annulateur d'une matrice

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Ann}(A)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de A :

$$\mathrm{Ann}(A) = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P(A) = 0\}.$$

On donne ensuite la définition d'un **idéal** de $\mathbb{C}[X]$. Une partie $\mathscr{I}$ de $\mathbb{C}[X]$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ si :

- $\mathscr{I}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}[X], +)$.
- pour tout P dans $\mathscr{I}$ et Q dans $\mathbb{C}[X]$, $Q \times P \in \mathscr{I}$.

14. Montrer que $\mathrm{Ann}(A)$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

Correction

Déjà, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Ann}(A) \neq \emptyset$ car $0 \in \mathrm{Ann}(A)$. Ensuite, si $(P, Q) \in \mathrm{Ann}(A)^2$, $P(A) = Q(A) = 0$ donc $(P - Q)(A) = 0$, donc $\mathrm{Ann}(A)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}[X]$. Enfin, si $P \in \mathrm{Ann}(A)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$, $PQ \in \mathrm{Ann}(A)$ par la question 1. Donc $\mathrm{Ann}(A)$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

Afin de mieux comprendre la stucture des polynômes annulateurs d'une matrice, on va pour terminer ce problème déterminer la structure des idéaux de $\mathbb{C}[X]$. On va montrer le résultat suivant :

Les idéaux de $\mathbb{C}[X]$ sont les $P.\mathbb{C}[X] = \{Q \in \mathbb{C}[X],\ P|Q\}$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.

15. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P.\mathbb{C}[X]$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

Correction

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors $P.\mathbb{C}[X] \neq \emptyset$ car $0 = P \times 0 \in P.\mathbb{C}[X]$. Ensuite, si A et B sont dans $P.\mathbb{C}[X]$, on dispose de U et V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $A = PU$ et $B = PV$, donc $A - B = P(U - V) \in P.\mathbb{C}[X]$. Donc $P.\mathbb{C}[X]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}[X], +)$. Enfin, si $A \in P.\mathbb{C}[X]$ et $B \in \mathbb{C}[X]$, on dispose de $U \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = PU$ donc $AB = PUB \in P.\mathbb{C}[X]$. Donc $P\mathbb{C}[X]$ est bien un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

Soit maintenant $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathbb{C}[X]$, que l'on va supposer non réduit à 0 (s'il est réduit à 0, $\mathscr{I} = 0.\mathbb{C}[X]$).

16. Montrer que $\mathscr{I}$ admet un polynôme non nul de degré minimal, P_0, et que $\mathscr{I} = P_0.\mathbb{C}[X]$.

Correction

Soit $D = \{\deg(P),\ P \in \mathscr{I}\} \cap \mathbb{N}$. Comme $\mathscr{I}$ n'est pas réduit à 0, il contient un polynôme de degré $\geqslant 0$, donc D est une partie non vide de $\mathbb{N}$. D contient donc un plus petit élément d_0. Il existe alors un polynôme P_0 de $\mathscr{I}$ de degré d_0.
Écrivons la division euclidienne de Q par P_0 : $Q = P_0 S + R$, avec $\deg(R) < \deg(P_0)$. Comme $\mathscr{I}$ est un idéal et que $P_0 \in \mathscr{I}$, $P_0 S \in \mathscr{I}$. Donc, comme $Q \in \mathscr{I}$, $Q - P_0 S \in \mathscr{I}$, donc $R \in \mathscr{I}$. Si $R \neq 0$, on aurait $0 \leqslant \deg(R) < \deg(P_0)$, ce qui contredirait la minimalité du degré de P_0. Donc $R = 0$ et P_0 divise Q.

On conclut alors que $\mathscr{I} \subset P_0.\mathbb{C}[X]$. Mais si $P_0 \in \mathscr{I}$, alors pour tout U dans $\mathbb{C}[X]$, $P_0.U \in \mathscr{I}$. Donc $P_0.\mathbb{C}[X] \subset \mathscr{I}$. Par double inclusion, on en déduit que $\mathscr{I} = P_0.\mathbb{C}[X]$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

17. Montrer alors que pour toute matrice A, il existe un unique polynôme **unitaire** π_A tel que $\mathrm{Ann}(A) = \pi_A.\mathbb{C}[X]$.

Correction

Si A est une matrice, on a vu que $\mathrm{Ann}(A)$ était un idéal de $\mathbb{C}[X]$. Par la question précédente, $\mathrm{Ann}(A)$ est donc de la forme $\pi_A.\mathbb{C}[X]$, avec π_A un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

On appelle ce polynôme le polynôme minimal de A.

18. Si A est une matrice compagnon, montrer que π_A n'est pas le polynôme nul.

Correction

Si A est la matrice compagnon d'un polynôme unitaire non nul P, alors $P(A) = 0$ par la partie précédente. Donc $\mathrm{Ann}(A)$ n'est pas réduit à 0, donc π_A ne peut pas être nul ! (sinon $\mathrm{Ann}(A) = 0.\mathbb{C}[X] = \{0\}$.

19. Si A est une matrice niplotente, montrer qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $\pi_A(X) = X^k$.

Correction

Si A est nilpotente, on dispose de k dans $\mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Donc X^k est un polynôme annulateur de A. Il doit nécessairement être divisible par π_A, donc π_A divise X^k donc π_A est de la forme X^ℓ avec $\ell < k$.