MPSI1 – Programme de colles
Semaine 20 – du 11 au 15 mars 2024

Polynômes

Révisions sur tout le programme précédent.

Espaces vectoriels et applications linéaires – COURS SEULEMENT

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;*
- *présenter quelques notions de géométrie affine, afin d'interpréter géométriquement certaines situations.*

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général ; on en tirera parti par de nombreuses figures.

Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

A - Espaces vectoriels – COURS SEULEMENT

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Organisation de la colle

— Cours sur les polynômes et le début de l'algèbre linéaire. Il s'agit essentiellement, en algèbre linéaire, de montrer la connaissance des définitions et leur maîtrise sur de petits exemples.

— Exercices **uniquement** sur les polynômes. Pas de fractions rationnelles, on les fera à un autre moment.

Exemples de questions de cours

1. N'importe quelle définition du cours d'algèbre linéaire + un exemple !
2. Une intersection de 2 sev est un sev/une intersection quelconque de sev est un sev.
3. Si F et G sont deux sev de E, $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.
4. Définition du sous-espace vectoriel engendré par A + il s'agit du plus petit sev contenant A.
5. Lemmes techniques sur les sev engendrés :
   — si $x \in \mathrm{Vect}(A)$, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A)$.
   — si $y \in \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$ avec un coefficient non nul devant x, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.
6. Définition d'une famille (quelconque) libre / une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres / si une famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre et $y \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$, alors $(x_i)_{i \in I} \cup \{y\}$ est libre.
7. Caractérisation de la liberté par unicité de l'écriture d'un élément de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$.
8. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre (preuve dans le cas fini).