MPSI1 – Programme de colles – Semaine 21 – du 18 au 22 mars 2024

Espaces vectoriels et applications linéaires

A - Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$. Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Notations $\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée. Base, coordonnées.	 Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces supplémentaires.	 La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

C - Applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque. Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\big(u(x_i)\big)_{i\in I}$.	 Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition. Caractérisation de l'injectivité.
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.

Contenus	Capacités & Commentaires
Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
(**à partir du 22/03**) Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.

Organisation de la colle

- Cours d'algèbre linéaire.
- Exercices d'algèbre linéaire sans dimension. Révisions sur les polynômes (en algèbre linéaire par exemple !) **Pas de projecteurs et de symétries en début de semaine.**

Exemples de questions de cours

1. Lemmes techniques sur les sev engendrés :
   - si $x \in \mathrm{Vect}(A)$, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A)$.
   - si $y \in \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$ avec un coefficient non nul devant x, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.
2. Définition d'une famille (quelconque) libre + une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres + si une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre et $y \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$, alors $(x_i)_{i\in I} \cup \{y\}$ est libre.
3. Caractérisation de la liberté par unicité de l'écriture d'un élément de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
4. Une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre (preuve dans le cas fini).
5. Somme directe, caractérisation d'une somme directe.

6. Distributivité de $\circ$ sur $+$; si φ est linéaire bijective, φ^{-1} est linéaire.
7. L'image directe, l'image réciproque d'un sev par une application linéaire est un sev.
8. Définition du noyau et de l'image. Condition Nécessaire et Suffisante d'injectivité, puis de surjectivité en fonction de l'image et du noyau.
9. Une application linéaire réalise un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ sur $\mathrm{Im}(f)$: formulation précise et démonstration.
10. Description et démonstration de l'ensemble des solutions de $f(x) = y$ si $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
11. Lien entre familles et injectivité/surjectivité/bijectivité des applications linéaires.

Questions de cours à poser à partir du mercredi 20 mars.

12. Définition d'une projection + une projection est linéaire + si p est la projection sur F parallèlement à G, $F = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(p)$ + $p \circ p = p$.
13. Si $p \circ p = p$, alors p est une projection.
14. Définition d'une symétrie + $s \circ s = s$ + caractérisation algébrique des espaces par rapport auxquels on fait la symétrie.
15. Une involution est une symétrie.