DM 14
Pour le lundi 19 mars

Formules. Le minimum à faire est 1,2,3 (le 3 est en fin de semaine). Pour les autres, le 5 sera faisable mercredi, le 6 en fin de semaine !

Exercice 1. On définit $a = (-1, 2, 1), b = (0, 1, -1), u = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur $w \in \mathbb{R}^3 n'$ appartenant pas à Vect(a, b).

Correction

(je court-circuite un peu l'exo en cherchant une équation de $\mathrm{Vect}(a, b)$ directement. Cela me paraît plus simple) Déterminons une équation de $\mathrm{Vect}(a, b)$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(a, b) &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda a + \mu b \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, on a, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, les équivalences

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda = x \\ 2\lambda + \mu = y \\ \lambda - \mu = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda = x \\ \mu = y + 2x \\ -\mu = z + x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda = x \\ \mu = y + 2x \\ 0 = 3x + y + z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(a, b) \Leftrightarrow 3x + y + z = 0.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(a, b)$.

2. Montrer que Vect$(a, b) =$ Vect(u, v).

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Déjà, u et v vérifient l'équation $3x+y+z=0$ donc u et v sont dans $\mathrm{Vect}(a,b)$ donc $\mathrm{Vect}(u,v) \subset \mathrm{Vect}(a,b)$.
Mais on remarque que $a = \frac{2}{5}v - \frac{1}{5}u$ donc $a \in \mathrm{Vect}(u,v)$. De même, $b = \frac{1}{5}v + \frac{2}{5}u$ donc $b \in \mathrm{Vect}(u,v)$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(a,b) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$.
D'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

3. Trouver trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\forall (x,y,z) \in \mathrm{Vect}(a,b), \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Correction

Déjà fait ! En fait, plein de choses sont possibles ici, voilà pourquoi j'ai mis deux questions différentes. On peut chercher une équation qui marcher pour a et b par exemple et dire qu'alors l'équation marche pour tout élément de $\mathrm{Vect}(a,b)$. Mais le langage des systèmes linéaires et des conditions de compatibilité permettent de faire une équivalence.

4. Montrer que $\mathrm{Vect}(a,b) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\right\}$.

Correction

Déjà fait aussi.

Exercice 2. Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $E_a = \{f \in E, f(a) = 0\}$.

1. Montrer, que pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.

Correction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déjà, la fonction nulle s'annule bien en a, donc elle appartient à E_a.
Soient ensuite f et g dans E_a, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = 0,$$

donc $\lambda f + \mu g \in E_a$. Donc E_a est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$. On fera attention au fait que la somme n'est pas supposée directe : il faut donc chercher une décomposition !

Correction

Soit $f \in E$.

...au brouillon...

On cherche à écrire f comme la somme de g et de h avec $g \in E_a$ et $h \in E_b$. Ainsi, g doit s'annuler en a et valoir $f(b)$ en b. Tant qu'à faire, si g est une fonction affine, cela a l'air de marcher... !

Posons $g : x \mapsto \dfrac{f(b)}{b-a}(x-a)$ et $h = f - g$. Alors $g(a) = 0$, donc $g \in E_a$, $h(b) = f(b) - g(b) = 0$ donc $h \in E_b$, et $g + h = f$.
Donc $E \subset E_a + E_b$, donc $E = E_a + E_b$.

3. La somme de E_a et de E_b peut-elle être directe ?

Correction

NON, la somme n'est pas directe ! En effet, si $f : x \mapsto (x-a)(x-b)$, aoors f n'est pas la fonction nulle mais $f \in E_a \cap E_b$. Donc $E_a \cap E_b \neq \{0\}$, donc la somme n'est pas directe.

Exercice 3. Soit p un projecteur de E. On définit les sous-espaces

$$F_1 = \{f \in \mathscr{L}(E), \exists u \in \mathscr{L}(E), f = u \circ p\}, \quad F_2 = \{f \in \mathscr{L}(E), \exists u \in \mathscr{L}(E), f = u \circ (\mathrm{Id} - p)\}.$$

Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires de $\mathscr{L}(E)$. On procèdera par analyse-synthèse, et on fera très attention aux objets manipulés.

Correction

Là, on fait une analyse-synthèse. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Analyse. On suppose que $f = g + h$ avec $g \in F_1$ et $h \in F_2$. On dispose donc de u et de v dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $f = u \circ p + v \circ q$, si l'on pose $q = \mathrm{Id}_E - p$. En particulier,

$$f \circ p = u \circ p \circ p + v \circ q \circ p = u \circ p \text{ car } p \circ p = p \text{ et } q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

De même, $f \circ q = v \circ q$.
Ainsi,

$$g = u \circ p = f \circ p \text{ et } h = v \circ q = f \circ q.$$

Synthèse. Posons $g = f \circ p$ et $h = f \circ q$. Alors

- $g \in F_1$,
- $h \in F_2$,
- $g + h = f \circ (p + q) = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Ceci démontre que $\forall f \in E,\ \exists!(g, h) \in F_1 \times F_2,\ f = g + h$, ce qui assure la supplémentarité des deux sous-espaces vectoriels.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E strictement inclus dans E. On veut montrer que E ne peut pas s'écrire comme $F_1 \cup \cdots \cup F_n$.

1. Établir le résultat pour $n = 2$.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Si E s'écrit comme la réunion de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2, alors $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E donc, d'après le cours, $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$, donc $F_1 = E$ ou $F_2 = E$, absurde car ces deux sous-espaces vectoriels sont censés être stricts.

On suppose le résultat vrai pour $n-1 \in \mathbb{N}$.

2. Si $F_n \subset F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$, conclure.

Correction

Si $F_n \subset F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$, alors $F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1} = E$, donc on est ramenés au résultat par le principe de récurrence.

Supposons que $F_n \not\subset F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$ et choisissons $x \in F_n \backslash (F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1})$ et $y \in E \backslash F_n$.

3. Montrer que $\lambda x + y \notin F_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y \in F_n$. Alors, comme $x \in F_n$, $\lambda x + y - \lambda x \in F_n$, c'est-à-dire que $y \in F_n$, absurde !

4. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.

Correction

Supposons qu'il existe $\lambda \neq \mu$ tels que $\lambda x + y \in F_i$ et $\mu x + y \in F_i$. Alors $(\lambda - \mu)x \in F_i$ soit, comme $\lambda - \mu \neq 0$, $x \in F_i$, absurde !

5. Conclure que $\displaystyle\bigcup_{k \in [1,n]} F_k \neq E$.

Correction

Comme $\mathbb{R}$ est infini, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y$ ne soit dans aucun des $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$, ni dans F_n. Ainsi, $F_1 \cup \cdots \cup F_n \neq E$!

Exercice 5. *Difficile*. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, dont tous les sous-espaces admettent des supplémentaires. Soit $\phi \in \mathscr{L}(E)$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ \phi$ si, et seulement si, $\ker\phi \subset \ker(u)$.

Correction

S'il existe $v \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ \phi$, alors pour tout x dans $\ker(\phi)$, $u(x) = v(\phi(x)) = v(0) = 0$, donc $x \in \ker(u)$.
Si $\ker(\phi) \subset \ker(u)$, on voudrait définir « $v = u \circ \phi^{-1}$ ». Mais cela n'a pas de sens... sauf si l'on fait en sorte de rendre ϕ bijective ! Soit alors S un supplémentaire de $\ker(\phi)$ dans E. Alors

$$\psi : \left| \begin{array}{l} S \to \mathrm{Im}(\phi) \\ x \mapsto \phi(x) \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme.}$$

Soit T un supplémentaire de $\mathrm{Im}(\phi)$ dans E. Posons alors $v \in \mathscr{L}(E, F)$ définie par :

$$v_{|T} = 0_{\mathscr{L}(T,F)} \text{ et } v_{|\mathrm{Im}(\phi)} = u \circ \psi^{-1}$$

(on rappelle que l'on peut définir une application linéaire par sa restriction à des sous-espaces supplémentaires)
Soit alors $x \in E$. On écrit $x = y + z$ avec $y \in \ker(\phi)$ et $z \in S$. Alors

$$u(x) = u(y + z) = u(z) \text{ car } y \in \ker(\phi) \subset \ker(u).$$

Ensuite,

$$v \circ \phi(x) = u \circ \psi^{-1} \circ \phi(x) = u(x),$$

d'où l'égalité désirée !

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Montrer que si u et v sont deux symétries, alors $u \circ v$ est une symétrie si, et seulement si u et v commutent, i.e. $u \circ v = v \circ u$.

Correction

Supposons que $u \circ v$ est une symétrie. Alors $u \circ v$ est une involution, i.e. $u \circ v \circ u \circ v = \mathrm{Id}$. En composant à gauche par u et en utilisant le fait que $u \circ u = \mathrm{Id}$, on obtient $v \circ u \circ v = u$. En faisant de même avec v, on conclut que $u \circ v = v \circ u$, donc u et v commutent.
Réciproquement, si u et v commutent, $u \circ v \circ u \circ v = u^2 \circ v^2 = \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$. Donc $u \circ v$ est une symétrie.

Soient u et v dans $\mathscr{L}(E)$, deux symétries qui **commutent**.

2. Montrer que $\ker(u \circ v - \mathrm{Id}) = \ker(u - v)$ et que $\ker(u \circ v + \mathrm{Id}) = \ker(u + v)$.

Correction

Montrons une seule des deux égalités, l'autre se fera similairement.
Soit $x \in E$. Alors $x \in \ker(u \circ v - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow u \circ v(x) = x \Leftrightarrow v(x) = u(x) \Leftrightarrow x \in \ker(v - u)$ (on a utilisé le fait que $u \circ u = \mathrm{Id}$).

3. (a) Montrer que pour tout λ dans $\mathbb{K}$, u stabilise $\ker(v - \lambda\mathrm{Id})$. On admettra que réciproquement, pour tout λ, v stabilise $\ker(u - \lambda\mathrm{Id})$.

Correction

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \ker(v - \lambda\mathrm{Id})$. Alors $v(x) = \lambda x$. Montrons que $u(x) \in \ker(v - \lambda\mathrm{Id})$. On sait que $v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$, donc $u(x) \in \ker(v - \lambda\mathrm{Id})$. Donc u stabilise bien $\ker(v - \lambda\mathrm{Id})$.

(b) Montrer que si pour un certain λ, $\ker(u - \lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\}$, alors $\lambda = \pm 1$.

Correction

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ker(u - \lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\}$. Soit alors $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors $u \circ u(x) = \lambda^2 x$, i.e. $x = \lambda^2 x$, donc, comme $x \neq 0$, $\lambda^2 = 1$, donc, comme $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \pm 1$.

4. Montrer que $u(\ker(v - \mathrm{Id})) = \ker(v - \mathrm{Id})$ et $u(\ker(v + \mathrm{Id})) = \ker(v + \mathrm{Id})$ et que $v(\ker(u - \mathrm{Id})) = \ker(u - \mathrm{Id})$ et $v(\ker(u + \mathrm{Id})) = \ker(u + \mathrm{Id})$.

Correction

Montrons que $u(\ker(v - \mathrm{Id})) = \ker(v - \mathrm{Id})$.
Soit $y \in u(\ker(v - \mathrm{Id}))$. Alors on dispose de $x \in \ker(v - \mathrm{Id})$ tel que $y = u(x)$. Alors $v(y) - y = v(u(x)) - u(x) = u(v(x)) - u(x) = u(x) - u(x) = 0$. Donc $u(x) \in \ker(v - \mathrm{Id})$.
Ensuite, montrons que $\ker(v - \mathrm{Id}) \subset u(\ker(v - \mathrm{Id}))$. Soit $y \in \ker(v - \mathrm{Id})$. Alors $v(y) = y$. Mais $y = u^2(y)$, donc $y = u(x)$, avec $x = u(y)$ et $v(x) = v(u(y)) = u(v(y)) = u(y) = x$, donc $x \in \ker(v - \mathrm{Id})$. Donc $y \in u(\ker(v - \mathrm{Id}))$. D'où l'inclusion réciproque et le

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

résultat.
On montre de même que $u(\ker(v + \mathrm{Id})) = \ker(v + \mathrm{Id})$, et les autres égalités.

On suppose maintenant que u et v sont deux symétries de E qui **anticommutent**, i.e. $u \circ v = -v \circ u$.

5. Montrer que $u(\ker(v - \mathrm{Id})) = \ker(v + \mathrm{Id})$ et $u(\ker(v + \mathrm{Id})) = \ker(v - \mathrm{Id})$ et que $v(\ker(u - \mathrm{Id})) = \ker(u + \mathrm{Id})$ et $v(\ker(u + \mathrm{Id})) = \ker(u - \mathrm{Id})$.

Correction

Montrons que $u(\ker(v - \mathrm{Id})) = \ker(v + \mathrm{Id})$.
Soit $y \in u(\ker(v - \mathrm{Id}))$. Alors on dispose de $x \in \ker(v - \mathrm{Id})$ tel que $y = u(x)$. Alors $v(y) + y = v(u(x)) + u(x) = -u(v(x)) + u(x) = -u(x) + u(x) = 0$. Donc $u(x) \in \ker(v + \mathrm{Id})$.
Ensuite, montrons que $\ker(v + \mathrm{Id}) \subset u(\ker(v - \mathrm{Id}))$. Soit $y \in \ker(v + \mathrm{Id})$. Alors $v(y) = -y$. Mais $y = u^2(y)$, donc $y = u(x)$, avec $x = u(y)$ et $v(x) = v(u(y)) = -u(v(y)) = -u(-y) = u(y) = x$, donc $x \in \ker(v - \mathrm{Id})$. Donc $y \in u(\ker(v - \mathrm{Id}))$. D'où l'inclusion réciproque et le résultat.
On montre de même que $u(\ker(v + \mathrm{Id})) = \ker(v - \mathrm{Id})$.