MPSI1 – Programme de colles – Semaine 22 – du 25 au 29 mars 2024

Espaces vectoriels et applications linéaires

A - Espaces vectoriels

Cf programme précédent.

B - Espaces de dimension finie – COURS SEULEMENT

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs. Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

Cf, programme précédent + **projecteurs et symétries** +

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle. Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	Formes coordonnées relativement à une base.

Organisation de la colle

- Cours d'algèbre linéaire, avec dimension.
- Exercices d'algèbre linéaire, sans dimension en début de semaine (potentiellement un peu en fin de semaine, mais la dimension sera au programme la semaine prochaine !)

Exemples de questions de cours

1. Une application linéaire réalise un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ sur $\mathrm{Im}(f)$: formulation précise et démonstration.
2. Projections : définition, caractérisation algébrique.
3. Symétries : définition, caractérisation algébrique.
4. Si H est un hyperplan, alors pour tout $x \notin H$, $\mathrm{Vect}(x)$ est un supplémentaire de H.
5. Si H possède une droite pour supplémentaire, alors H est un hyperplan.

6. Toute famille de $n+1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée.
7. Si E est un $\mathbb{K}$-evdf, si $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$ avec $\mathscr{L}$ libre et $\mathscr{G}$ génératrice, il existe $\mathscr{B}$ une base telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.
8. Lien entre cardinal des familles et dimension.
9. Une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$; une famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
10. Un sev d'un $\mathbb{K}$-evdf est de dimension finie, inférieure à celle du gros espace.
11. Dimension d'une somme directe/existence de supplémentaires en dimension finie.
12. Formule de Grassmann.
13. CNS simplifiée de somme directe.
14. Deux evdf sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.
15. Dimensions d'espaces classiques.