DM 14
Pour le lundi 25 mars

Minimum obligatoire. Problème 1, questions 1 à 4, Problème 2, questions 1 à 4. Y passer 2h. La partie B du problème 2 est tout à fait abordable, la 3 un peu plus complexe.

Problème 1. Une application linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit n et m deux entiers naturels. On considère $(x_0, \dots, x_m)$ $m+1$ réels deux à deux distincts.
On considère l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{m+1} \\ \quad P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_m)) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{m+1})$.

Correction

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(x_0), \dots, (\lambda P + Q)(x_m)) \\ &= (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \dots, \lambda P(x_m) + Q(x_m)) \text{ par linéarité de l'évaluation.} \\ &= \lambda(P(x_0), \dots, P(x_m)) + (Q(x_0), \dots, Q(x_m)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est linéaire.}}$

2. On suppose que $n \leqslant m$. Démontrer que φ est injective.

Correction

Déterminons $\ker(\varphi)$. Soit P dans $\ker(\varphi)$. Alors

$$P(x_0) = \cdots = P(x_m) = 0,$$

donc P a $m+1$ racines distinctes. Mais $\deg(P) \leqslant n < m+1$, donc P s'annule plus de fois que son degré, donc P est nul. Donc $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective.

3. On suppose que $n > m$. Démontrer que $\ker(\varphi) = \{AP, P \in \mathbb{R}_{n-m-1}[X]\}$, où A est un polynôme à préciser.

Correction

Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P \in \ker(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow P(x_0) = \cdots = P(x_m) = 0 \\ &\Leftrightarrow (X - x_0) \dots (X - x_m) \text{ divise } P \text{ (car les } x_i \text{ sont deux à deux distincts)} \\ &\Leftrightarrow P \in \left\{ Q \times \prod_{i=0}^{m} (X - x_i),\ Q \in \mathbb{R}_{n-m-1}[X] \right\}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \ker(\varphi) = \left\{ Q \times \prod_{i=0}^{m} (X - x_i),\ Q \in \mathbb{R}_{n-m-1}[X] \right\}.}$$

On suppose désormais que $n = m$.

4. Démontrer que φ est bijective, et préciser sa bijection réciproque.

Correction

La bijectivité de φ est un corollaie du théorème du rang : si $m = n$, φ est une application injective entre deux espaces de même dimension, donc est bijective.
Sa bijection réciproque est donnée par la formule d'interpolation de Lagrange ! En effet, pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui soit égal à y_i en x_i. Ce polynôme vaut

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i,$$

où $(L_0, \dots, L_n)$ est la base d'interpolation de Lagrange associée à $(x_0, \dots, x_n)$.
Donc

$$\varphi^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (y_0, \dots, y_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i L_i \end{array} \right.$$

Problème 2. Quelques questions sur les projecteurs

Les parties A et C sont assez théoriques, la partie B est très pratique. De nombreuses questions sont des questions de cours ou des exercices faits en classe.

A. Généralités

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E, tels que $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On définit $r = p + q - q \circ p$.

1. Démontrer que pour tous u et v dans $\mathscr{L}(E)$, $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(v) \subset \ker(u)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Raisonnons par équivalence. Soit u et v dans $\mathscr{L}(E)$. Alors

$$\begin{aligned} u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)} &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ u(v(x)) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{Im}(v),\ u(y) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{Im}(v),\ y \in \ker(u) \\ &\boxed{\Leftrightarrow \mathrm{Im}(v) \subset \ker(u).} \end{aligned}$$

2. Calculer $p \circ r$, $q \circ r$, et démontrer que r est un projecteur.

Correction

Commençons par les deux calculs demandés :

- Déjà,

$$p \circ r = p \circ (p + q - q \circ p) = p \circ p + p \circ q - p \circ q \circ p.$$

Comem $p \circ q = 0$, et que $p \circ p = p$ (p est un projecteur !), on en déduit que

$$\boxed{p \circ r = p.}$$

- Ensuite,

$$q \circ r = q \circ (p + q - q \circ p) = q \circ p + q \circ q - q \circ q \circ p.$$

Mais q est un projecteur donc $q \circ q = q$, donc

$$\boxed{q \circ r = q \circ (p + q - q \circ p) = q \circ p + q - q \circ p = q.}$$

Finalement, calculons $r \circ r$:

$$r \circ r = (p + q - q \circ p) \circ r = p \circ r + q \circ r - q \circ p \circ r.$$

Mais $p \circ r = p$ et $q \circ r = q$, donc

$$\boxed{r \circ r = p + q - q \circ p = r.}$$

Donc r est un projecteur.

3. Démontrer que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Correction

Raisonnons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit x dans $\ker(r)$. Alors $r(x) = 0$, donc s

— $p \circ r(x) = 0$, donc $p(x) = 0$ donc $x \in \ker(p)$.

— $q \circ r(x) = 0$, donc $q(x) = 0$ donc $x \in \ker(q)$.

Donc $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$.

$\boxed{\supset}$ Soit x dans $\ker(p) \cap \ker(q)$. Alors $p(x) = q(x) = 0$, donc

$$r(x) = p(x) + q(x) - q \circ p(x) = 0 + 0 - q(0) = 0.$$

Donc $x \in \ker(r)$.

D'où la double inclusion et l'égalité de ces deux ensembles.

4. Démontrer que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Correction

Déjà, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors $r(x) = p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(r)$. De même si $x \in \mathrm{Im}(q)$. Donc $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(r)$. (c'est important à démontrer !)
Ensuite, ou bien on démontre par double inclusion que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ puis on regarde $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, ou bien on effectue, comme dans ce corrigé, une analyse-synthèse : soit x dans $\mathrm{Im}(r)$, a dans E tel que $x = r(a)$.
Analyse. On suppose que $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}(p)$ et $z \in \mathrm{Im}(q)$. Comme $z \in \mathrm{Im}(q)$, $z \in \ker(p)$, donc $p(x) = p(y) + 0 = y$, car $y \mathrm{Im} \mathrm{Im}(p)$. Mais $p \circ r = p$, donc $p(x) = p \circ r(a) = p(a)$. Donc $y = p(a)$.
De même, $q(x) = q(y) + q(z) = q(y) + z$ car $z \in \mathrm{Im}(q)$. Mais $q(x) = q(r(a)) = q(a)$, et $q(y) = q(p(a)$. Donc $z = q(a) - q \circ p(a)$.
Synthèse. Posons $y = p(a)$ et $z = q(a) - q \circ p(a)$. Alors

- $y \in \mathrm{Im}(p)$
- $z \in \mathrm{Im}(q)$
- $y + z = p(a) + q(a) - q \circ p(a) = r(a) = x$.

D'où le résultat !

B. Un exemple fonctionnel

Ici, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On note ψ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à 1, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires, $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.
On note $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\psi)$.

5. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. On admet que G, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ aussi.

Correction

Déjà, F est non vide car la fonction nulle s'annule en 0.
Ensuite, soient f et g deux fonctions de F et λ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0,$$

donc $\lambda f + g \in F$.
Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

6. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Correction

Démontrons ce résultat par analyse-synthèse. Soit φ dans E.
Analyse. On suppose que $\varphi = f + g$ avec f dans F et g dans G. Alors, comme $g \in \mathrm{Vect}(\psi)$, on dispose de λ dans $\mathbb{R}$ tel que $g = \lambda\psi$. En évaluant en 0 l'égalité $\varphi = f + g$, il vient

$$\varphi(0) = f(0) + g(0) \text{ i.e. } \varphi(0) = 0 + \lambda,$$

donc $g = \varphi(0)\psi$. Donc $f = \varphi - \varphi(0)\psi$. D'où l'unicité de la décomposition.
Synthèse. Posons $g = \varphi(0)\psi$ et $f = \varphi - \varphi(0)\psi$. Alors

- $g \in \mathrm{Vect}(\psi)$, donc $g \in G$,
- $f(0) = \varphi(0) - \varphi(0)\psi(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$, donc $f \in F$,
- $f + g = \varphi - \varphi(0)\psi + \varphi(0)\psi = \varphi$,

d'où l'existence de la décomposition, et donc la supplémentarité de F et G dans E.

7. On note p la projection sur G parallèlement à F. Déterminer, si $\varphi \in E$, l'expression de $p(\varphi)$.

Correction

Par l'analyse précédente, on sait que, si $\varphi \in E$, $p(\varphi)$ est la composante de φ appartenant à G dans la décomposition de φ en un élément de F et un de G. Donc

$$p(\varphi) = \varphi(0).\psi$$

8. Démontrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Correction

C'est une analyse-synthèse faite en cours ! (c'est même une question de cours du programme de colles). On trouve en particulier que la décomposition est

$$\varphi = f + g,$$

avec $f : x \mapsto \dfrac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}$, i.e. $f \in \mathcal{P}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}$, donc $g \in \mathcal{I}$.

9. On note q la projection sur $\mathcal{I}$ parallèlement à $\mathcal{P}$. Déterminer, si $\varphi \in E$, l'expression de $q(\varphi)$.

Correction

On en déduit, par la question précédente, que si $\varphi \in E$, $q(\varphi) : x \mapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}$.

10. Vérifier que $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et donner, si $\varphi \in E$, l'expression de $r(\varphi)$, où $r = p + q - q \circ p$.

Correction

Soit φ dans E. Alors $q(\varphi) : x \mapsto \dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}$, donc $\boxed{p \circ q(\varphi) = q(\varphi)(0)\psi = 0_E}$, donc $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Soit φ dans E. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$r(\varphi)(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2} - \frac{\varphi(0)-\varphi(-0)}{2} = \boxed{\varphi(0) + \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}}.$$

C. Un autre cas dans lequel r est un projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. On note A l'ensemble des projecteurs de E.

11. A est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$?

Correction

Non, A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$: $\mathrm{Id} \in A$ car $\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$, mais $\boxed{2\mathrm{Id} \notin A}$.

12. Démontrer que si p et q sont deux éléments de A qui commutent, alors $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.

Correction

Faisons la même démarche qu'en première partie :

$$p \circ r = p \circ p + p \circ q - p \circ q \circ p = p + p \circ q - p \circ (p \circ q) = p + p \circ q - p \circ q,$$

en utilisant successivement le fait que $p \circ p = p$ et $p \circ q = q \circ p$.
De même, $q \circ r = q$.
Enfin, $q \circ p \circ r = q \circ (p \circ r) = q \circ p$. On en déduit que

$$(p + q - q \circ p) \circ r = p \circ r + q \circ r - q \circ p \circ r = p + q - q \circ p = r,$$

donc r est un projecteur.

On définit sur A la relation $\preccurlyeq$ par

$$\forall (p, q) \in A^2,\ p \preccurlyeq q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p.$$

13. Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur A.

Correction

Vérifions que $\preccurlyeq$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

- (réflexivité) soit p dans A. Alors $p \circ p = p \circ p = p$ car p est un projecteur. Donc $p \preccurlyeq p$.

- (antisymétrique) soient p et q dans A tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq p$. Alors $p = p \circ q$ car $p \preccurlyeq q$ et $p \circ q = q$ car $q \preccurlyeq p$, donc $p = q$. D'où l'antisymétrie.
- (transitivité) soient p, q et r dans A tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq r$. Alors $p \circ q = q \circ p = p$ et $q \circ r = r \circ q = q$. Mais alors

$$\begin{aligned} p \circ r &= p \circ q \circ r \quad \text{car } p \preccurlyeq q \\ &= p \circ q \quad \text{car } q \preccurlyeq r \\ &= p \quad \text{car } p \preccurlyeq q \end{aligned}$$

et, de même, $r \circ p = p$, donc $p \preccurlyeq r$, d'où la transitivité.

14. Démontrer que si p et q sont deux projecteurs qui commutent, $p + q - q \circ p = \sup\{p, q\}$ (la notion de sup étant à comprendre au sens de la relation d'ordre $\preccurlyeq$).

Correction

Soient p et q deux projecteurs qui commutent et $r = p + q - q \circ p$. On a déjà vu que $p \circ r = p$ et $q \circ r = q$. De même, on montre facilement que $r \circ p = p$ et $r \circ q = q$. On en déduit que $p \preccurlyeq r$ et $q \preccurlyeq r$, donc r est un majorant de $\{p, q\}$.
Démontrons que c'est le plus petit majorant. Soit s un autre majorant de p et q. Alors $p \preccurlyeq s$ et $q \preccurlyeq s$. Mais alors $s \circ r = r \circ s$ car s commute avec p et q donc avec r, et

$$s \circ r = s \circ p + s \circ q - s \circ q \circ p = p + q - q \circ p = r,$$

car $s \circ p = p$, $s \circ q = q$ et $s \circ q \circ p = q \circ p$, donc $r \preccurlyeq s$, donc r est le plus petit des majorants de p et q, donc $r = \sup\{p, q\}$.

15. Déterminer, si p et q sont deux projecteurs qui commutent, $\inf\{p, q\}$.

Correction

Il faut trouver un projecteur r tel que $r \circ p = p \circ r = r$ et $r \circ q = q \circ r = r$. Une possibilité est de prendre $p \circ q$: on remarque que $r \circ p = p \circ q \circ p = p \circ p \circ q = p \circ q = r$, et de même pour $p \circ r$ et pour q. Donc r est un minorant de p et q. Maintenant, si s est un minorant de p et q, on a

$$s \circ r = s \circ p \circ q = s \circ q = s, \text{ et de même pour } r \circ s,$$

donc s est plus petit que r, donc r est le plus grand des minorants de p et q donc $r = \inf\{p, q\}$.