

## Espaces vectoriels et applications linéaires

### A - Espaces vectoriels

Révisions programme précédent.

### B - Espaces de dimension finie

Cf. programme précédent.

### C - Applications linéaires

Révisions du programme précédent et résultats en dimension finie :

CONTENUS    CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

#### a) Généralités

---

Application linéaire de rang fini.

Notation  $\text{rg}(u)$ .

Le rang de  $v \circ u$  est majoré par  $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$ . Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

---

#### c) Détermination d'une application linéaire

---

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie.

---

#### d) Théorème du rang

---

Forme géométrique du théorème du rang : si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ , alors  $u$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im } u$ .

Théorème du rang : si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $n = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$ .

---

### Organisation de la colle

- Cours d'algèbre linéaire.
- Exercices d'algèbre linéaire, surtout en dimension finie.

### Exemples de questions de cours

1. Un sev d'un  $\mathbb{K}$ -evdf est de dimension finie, inférieure à celle du gros espace.
  2. Dimension d'une somme directe/existence de supplémentaires en dimension finie.
  3. Formule de Grassmann.
  4. CNS simplifiée de somme directe.
  5. Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$
  6. Théorème du rang
  7. Conséquences du théorème du rang (injectivité/surjectivité/bijektivité, ou inversibilité à droite/à gauche)
  8. Majoration du rang de  $u \circ v$ . Égalités lorsque  $u$  est injective ou que  $v$  est surjective.
  9. Dimension d'un hyperplan/d'une intersection d'hyperplans.
-