

Chapitre 20 Fractions rationnelles

1 Construction



Si vous n'aimez pas les constructions abstraites, vous pouvez sauter la définition 1 et passer directement à la définition 3 et à la remarque 4.

Nous allons faire le point sur une construction d'un corps de fractions à partir d'un anneau (HP, mais avoir une idée de la manière dont les choses sont construites).

Définition 1 (et prop)

Soit A un anneau intègre. On définit sur $A \times A^*$ deux lois d'addition et de multiplication

- (i) Une addition : $(a, b) + (c, d) = (ad + cb, bd)$.
- (ii) Une multiplication : $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$.

On définit aussi une relation d'équivalence sur $A \times A^*$ par $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

L'ensemble $(A \times A^*) / \sim$ muni des lois $+$ et $\times$ induites est un corps, appelé corps des fractions de A . C'est le plus petit corps contenant A .

Exemple 2

$\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

Définition 3

1. On définit alors l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ comme le corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$, appelé corps des fractions rationnelles en une indéterminée.
2. Une fraction rationnelle R est donc représenté par un couple (P, Q) de polynômes où Q est non nul. On note $R = \frac{P}{Q}$ et on note que le couple (P, Q) n'est pas unique !
3. Si $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, si $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ si et seulement si $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.
4. $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est donc un corps.
5. Si $R = \frac{P}{Q}$ et $Q|P$, alors $R \in \mathbb{K}[X]$.
6. Si $R_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ et $R_2 = \frac{P_2}{Q_2}$,

$$R_1 + R_2 = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} \text{ et } R_1 \times R_2 = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}.$$

7. Si $R = \frac{P}{Q}$ et $P \neq 0$, alors l'inverse de R est noté $\frac{1}{R}$.

8. Si $R = \frac{P}{Q}$, avec $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$, si $S \in \mathbb{K}(X)$ est non constante, on définit

$$R \circ S = \frac{\sum_{k=0}^n a_k S^k}{\sum_{k=0}^p b_k S^k}.$$

Remarque 4

Il faut penser que les fractions rationnelles se manipulent comme on le souhaiterait !

1. $\frac{X+1}{X^2-2X+1} = \frac{X}{X^2-2X+1} + \frac{1}{X^2-2X+1} = \frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$
2. $\frac{2X^2-2}{3(X^2-2X+1)} = \frac{2(X-1)(X+1)}{3(X-1)^2} = \frac{2(X+1)}{3(X-1)}.$

Il faut donc retenir qu'une fraction rationnelle, c'est le « quotient » de deux polynômes.

Définition 5

Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. Un représentant irréductible de R est un couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que

- $R = \frac{P}{Q},$
- $P \wedge Q = 1,$
- Q est unitaire.

Proposition 6

Toute fraction rationnelle admet un unique représentant irréductible.

Démonstration

$\exists$ Soit (P, Q) un représentant de R .
Alors on dispose de $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $P = A \times (P \wedge Q)$ et $Q = B \times (P \wedge Q)$. Alors $AQ = BP$, donc $R = \frac{A}{B}$, avec $A \wedge B = 1$. Maintenant, si λ est le coefficient dominant de B ,

$$R = \frac{\frac{1}{\lambda} A}{\frac{1}{\lambda} B},$$

et $\frac{1}{\lambda} B$ est bien unitaire.

$\exists!$ Supposons que $R = \frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$ avec (P, Q) premiers entre eux, (A, B) premiers entre eux, Q et B unitaires. Alors $PB = QA$. Donc

— B divise QA , $B \wedge A = 1$ donc, par le théorème de Gauss, $B|Q$,

— $Q|PB$, $Q \wedge P = 1$, donc, par le théorème de Gauss, $Q|B$,

donc B et Q sont associés. Comme ils sont unitaires, ils sont égaux. Donc $B = Q$, comme $PB = QA$, $P = A$.

■

Définition 7

Soit R , une fraction rationnelle, $R = \frac{P}{Q}$. La quantité $\deg(P) - \deg(Q)$ est indépendante du représentant choisi. On l'appelle degré de la fraction rationnelle.

Démonstration

Si $R = \frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$, $PB = QA$ donc $\deg(P) + \deg(B) = \deg(Q) + \deg(A)$, donc

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

■

Remarque 8

Une fraction de degré nul n'est pas forcément constante ! Par exemple, $\frac{X}{X+1}$ est de degré nul.

On a les formules que l'on veut avoir pour le degré :

Proposition 9

Soit $(R, S) \in \mathbb{K}(X)^2$.

1. $\deg(R + S) \leq \max(\deg(R), \deg(S))$, avec égalité si $\deg(R) \neq \deg(S)$,
2. $\deg(R \times S) = \deg(R) + \deg(S)$,
3. si $R \neq 0$, $\deg \frac{1}{R} = -\deg(R)$,
4. si S est non constante, $\deg(R \circ S) = \deg(R) \times \deg(S)$.

Définition 10

Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Alors la quantité $\frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ ne dépend pas du couple représentant de R choisi. On l'appelle dérivée de R et on note

$$R' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Proposition 11

La dérivation vérifie les mêmes règles algébriques que la dérivation des fonctions.

Définition 12

Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction de $\mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible.

1. On appelle zéro de R toute racine de P .
2. On appelle pôle de R toute racine de Q .

Si λ est un pôle, la multiplicité de λ dans R est la multiplicité de λ en tant que racine de Q .

Exemple 13

1. Si $R = \frac{X^2 + 2X + 1}{(X - 2)^2(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{X + 1}{(X - 2)^2(X^2 + 1)}$,
 - sur $\mathbb{R}$: -1 est un zéro de R , 2 est le seul pôle de R ,
 - sur $\mathbb{C}$: -1 est un zéro de R , 2 , i et $-i$ sont les pôles de R .
2. La notion de pôle et de zéro dépend du corps de base.
3. Un réel λ ne peut pas être à la fois un pôle et un zéro d'une fraction rationnelle. En effet, cela signifierait que $P(\lambda) = Q(\lambda) = 0$, donc P et Q auraient une racine en commun, donc $\frac{P}{Q}$ ne serait pas irréductible.

Définition 14

Soit $R \in \mathbb{K}(X)$, $R = \frac{P}{Q}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ n'est pas un pôle de R , on peut définir l'évaluation de R en λ par

$$R(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}.$$

2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

Le but de cette section est pratique, il est d'écrire sous une forme bien particulière les fractions rationnelles : c'est la décomposition en éléments simples. Elles vont servir autant d'un point de vue pratique (calcul d'intégrales) que théorique (théorème de Gauss-Lucas).

Notre but est d'élargir des décompositions du type

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

Nous allons d'abord établir des théorèmes d'existence de la DES (Décomposition en Éléments Simples), puis donner des méthodes concrètes et pratico-pratiques de calcul.

2.1 Théorèmes d'existence

Le but est d'arriver aux deux propositions 17 et 19. Si vous ne voyez pas pourquoi on fait ce qu'il y a avant, lisez ces propositions.

Définition 15

Soit $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, irréductible. Alors il existe un unique $E \in \mathbb{K}[X]$, $S \in \mathbb{K}(X)$, tels que $R = E + S$ et $\deg(S) < 0$.

On appelle E partie entière de R .

Démonstration

☐ Effectuons la division euclidienne de P par Q : $P = AQ + B$, avec $\deg(B) < \deg(Q)$. Alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{AQ + B}{Q} = A + \frac{B}{Q},$$

$A \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(B) - \deg(Q) < 0$.

☐! Supposons $R = E + S = F + T$, avec $(E, F) \in \mathbb{K}[X]$ et $(S, T) \in \mathbb{K}(X)$, $\deg(S) < 0$ et $\deg(T) < 0$. Alors $E - F = T - S$. et $\deg(T - S) < 0$. Or, si $E \neq F$, $\deg(E - F) \geq 0$, donc $E = F$, et $T = S$.

■

Exemple 16

1. Nous avons déjà cherché une partie entière d'une fraction rationnelle, sans le savoir ! En effet, lorsque l'on cherche une primitive de

$$\frac{x^2}{1+x^2},$$

on écrit (« astuce ») que

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Ce qu'on a fait est, en réalité, une division euclidienne !

Proposition 17 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$)

Soit R dans $\mathbb{C}(X)$, $R = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de Q et $m_1, \dots, m_n$ leurs multiplicités respectives. Il existe E dans $\mathbb{C}[X]$, de degré $\deg(R)$ si $\deg(R) > 0$ (nul sinon), et des réels $(a_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq m_k}}$ tel que

$$R(X) = E(X) + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{a_{k\ell}}{(X - \lambda_k)^\ell} \right).$$

Exemple 18

- Si $R(X) = \frac{3X^2 + 2}{(X+1)^2 X (X-\pi)^3}$, $\deg(R) = -4$ donc il n'y a pas de partie entière. Ensuite, le théorème de décomposition en éléments simples nous donne l'existence de 6 réels (a, b, c, d, e, f) tels que

$$R(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X} + \frac{d}{X-\pi} + \frac{e}{(X-\pi)^2} + \frac{f}{(X-\pi)^3}.$$

- Si $S(X) = \frac{X^3 - 4}{(X-1)(X-2)}$, alors $\deg(S) > 0$ donc il faut faire une division euclidienne.

On développe le dénominateur pour faire la division euclidienne, c'est plus simple.

On écrit que

$$X^3 - 4 = (X+3)(X^2 - 3X + 2) + (7X - 10).$$

Ainsi,

$$S(X) = X + 3 + \frac{7X - 10}{(X-1)(X-2)}$$

On dispose alors de deux réels a et b tels que

$$S(X) = X + 3 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}.$$

Proposition 19 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)

Soit R dans $\mathbb{R}(X)$, sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$, telle que la décomposition de Q en produit d'irréductibles soit

$$Q(X) = \Lambda \left(\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i} \right) \left(\prod_{k=1}^p (X^2 + b_k X + c_k)^{\mu_k} \right).$$

(avec $b_k^2 - 4c_k < 0$) Alors il existe E dans $\mathbb{R}[X]$, de degré $\deg(R)$ si $\deg(R) > 0$ (nul sinon), et des réels $(\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m_i}}, (\beta_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq \mu_k}}, (\gamma_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq \mu_k}}$ tels que

$$R(X) = E(X) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X - \lambda_i)^j} \right) + \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\ell=1}^{\mu_k} \frac{\beta_{k\ell} X + \gamma_{k\ell}}{(X^2 + b_k X + c_k)^\ell} \right).$$

Exemple 20

Par exemple,

$$\begin{aligned} & \frac{3X + 1}{(X^2 + X + 1)^2 (X - 3)^3 (X + 1)} \\ &= \frac{a}{X + 1} + \frac{b}{X - 3} + \frac{c}{(X - 3)^2} + \frac{d}{(X - 3)^3} + \frac{eX + f}{X^2 + X + 1} + \frac{gX + h}{(X^2 + X + 1)^2}, \end{aligned}$$

avec (a, b, c, d, e, f, g, h) huit réels.

Démonstration

Nous n'allons pas donner l'existence en détail, mais juste donner quelques aspects intéressants de la preuve :

- la **partie entière** s'obtient à l'aide de la **division euclidienne** de P par Q .
- Si $R = \frac{P}{Q_1 Q_2}$ avec Q_1 et Q_2 premiers entre eux, par le théorème de Bézout, on peut écrire $Q_1 U_1 + Q_2 U_2 = 1$, donc

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{Q_1 P U_1 + Q_2 P U_2}{Q_1 Q_2} = \frac{P U_1}{Q_2} + \frac{P U_2}{Q_1},$$

donc on peut « séparer » les termes premiers entre eux,

- si on s'intéresse à un terme du type

$$\frac{P}{(X - \alpha)^m},$$

avec $\deg(P) < m$, une formule de Taylor nous permet d'écrire cette fraction comme

$$\frac{\sum_{k=0}^m \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k}{(X - \alpha)^m} = \sum_{k=0}^m \frac{\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}}{(X - \alpha)^{m-k}}$$

■

3 Méthodes de calcul

TD, exercice 32. Faire les premiers calculs surtout.
Cahier de calculs, fiche 25 : de 25.1 à 25.6.

Point de méthode 21 (Les trois premières étapes)

Ce sont **toujours** les mêmes :

1. On calcule la partie entière via une division euclidienne,
2. on vérifie que la fraction est irréductible,
3. on écrit la décomposition théorique.

Maintenant, comment gérer les différents pôles ?

Proposition 22 (Pôles simples)

Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle, $R = \frac{P}{Q}$ (P irréductible), α un pôle simple de Q . Le coefficient a de $\frac{1}{X - \alpha}$ dans la D.E.S. de R est donné par l'une de ces deux formules :

- si $Q = (X - \alpha)\tilde{Q}$, $a = \frac{P(\alpha)}{\tilde{Q}(\alpha)}$.
- $a = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

Démonstration

Il faut penser à la décomposition en éléments simples théorique : on sait que

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - \alpha)\tilde{Q}} = \frac{a}{X - \alpha} + E_2 + E_3 + \dots,$$

où E_2, E_3 sont des éléments simples, où il n'y a pas de $X - \alpha$! Ainsi, en multipliant par $X - \alpha$, on obtient

$$\frac{P}{\tilde{Q}} = a + (X - \alpha)E_2 + (X - \alpha)E_3 + \dots$$

En évaluant en α , tous les termes à droite s'annulent... sauf le a !

Pour la deuxième formule, il suffit de remarquer que

$$Q' = \tilde{Q} + (X - \alpha)\tilde{Q}',$$

et donc $Q'(\alpha) = \tilde{Q}(\alpha)$. ■

Point de méthode 23 (Pôle simple)

4. pour déterminer le coefficient de $\frac{1}{X - \alpha}$, on multiplie R et la DES théorique par $X - \alpha$ et on évalue en α .

Exemple.
$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$$

Pour déterminer le coefficient de $\frac{1}{X-1}$, on multiplie tout par $X-1$

$$\frac{1}{(X-2)(X-3)} = a + \frac{b(X-1)}{X-2} + \frac{c(X-1)}{X-3}$$

et on évalue en 1 :

$$\frac{1}{(-1)(-2)} = a + 0 + 0,$$

i.e. $a = \frac{1}{2}$.

Exemple 24

1. Déterminons la décomposition en éléments simples de $\frac{X}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. La fraction est de degré strictement négatif, donc on sait que l'on dispose de trois réels (a, b, c) tels que

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}.$$

Pour calculer a , on multiplie par $X-1$ et on évalue en 1. On obtient

$$a = \frac{1}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}.$$

Pour calculer b , on multiplie par $X-2$ et on évalue en 2. On obtient

$$b = \frac{2}{(2-1)(2-3)} = -2$$

Pour calculer c , on multiplie par $X-3$ et on évalue en 3. On obtient

$$c = \frac{3}{(3-1)(3-2)} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{2}{X-2} + \frac{3}{2(X-3)}.$$

2. La formule théorique peut être vraiment très utile ! Exemple, recherchons la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n - 1}$. On écrit que

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})}.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, on dispose de $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

En utilisant la formule théorique, en notant $P(X) = 1$ et $Q(X) = X^n - 1$, on sait que

$$a_k = \frac{P(e^{\frac{2ik\pi}{n}})}{Q'(e^{\frac{2ik\pi}{n}})} = \frac{1}{n(e^{\frac{2ik\pi}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{ne^{\frac{2ik(n-1)\pi}{n}}} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})}.$$

C'est satisfaisant, non ?

Point de méthode 25

5. Pôles multiples. Si α est un pôle de multiplicité m dans $\mathbb{R}$,

- le coefficient de $\frac{1}{(X - \alpha)^m}$ s'obtient comme les pôles simples : on multiplie tout par $(X - \alpha)^m$ et on évalue en α .

Exemple. Si $R = \frac{2X + 1}{(X - 1)^2(X + 2)}$, on sait que

$$R = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 2}.$$

En multipliant par $(X - 1)^2$,

$$\frac{2X + 1}{X + 2} = a(X - 1) + b + \frac{c(X - 1)^2}{X + 2},$$

donc, en évaluant en 1, $\frac{3}{3} = b$.

- pour les autres coefficients, c'est plus délicat :

— la méthode systématique est de soustraire le terme en $\frac{1}{(X - \alpha)^m}$ à R , et de tout remettre au même dénominateur : on obtient une nouvelle fraction rationnelle dont α est un pôle de multiplicité $m - 1$.

Exemple. dans la fraction précédente,

$$R = \frac{a}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R - \frac{1}{(X-1)^2} &= \frac{2X+1}{(X-1)^2(X+2)} - \frac{1}{(X-1)^2} \\ &= \frac{2X+1-(X+2)}{(X-1)^2(X+2)} \\ &= \frac{X-1}{(X-1)^2(X+2)} \\ &= \frac{1}{(X-1)(X+2)}. \end{aligned}$$

En multipliant par $X-1$ et en évaluant en 1, on obtient $a = \frac{1}{3}$.

- une autre possibilité, très efficace pour des termes en $\frac{1}{X-\alpha}$, est de multiplier par X , d'évaluer en $x \in \mathbb{R}$ et de faire tendre x vers $+\infty$.
Toujours dans notre exemple, si on revient à

$$\frac{2X+1}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{3(X+2)},$$

alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{x(2x+1)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{xa}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{x}{3(x+2)},$$

soit, en faisant tendre x vers $+\infty$,

$$0 = a + 0 - \frac{1}{3}.$$

- une autre méthode peut être d'évaluer en certains points (si le coefficient dur à trouver est le dernier).

Exemple. Revenons à l'exemple précédent, en supposant que l'on n'a pas trouvé a . On était arrêtés à

$$R = \frac{a}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+2}.$$

On trouve très facilement c , en multipliant par $X+2$ et en évaluant en -2 :
 $c = -\frac{1}{3}$. Donc

$$R = \frac{a}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{3(X+2)}.$$

Ensuite, on évalue en 0 :

$$\frac{1}{2} = -a + 1 - \frac{1}{6},$$

$$\text{donc } a = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

6. Cas des éléments irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{R}$.

- si l'élément irréductible de degré 2 est à la puissance 1, on peut faire la DES sur $\mathbb{C}$ et mettre au même dénominateur.

Exemple. $\frac{2X+1}{X^2(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}.$

$$c = \frac{2i+1}{i^2 \times 2i} = -1 + \frac{i}{2}.$$

Comme la fraction est réelle, elle est égale à son conjugué donc, par unicité de la DES, $d = \bar{c} = -1 - \frac{i}{2}$. Alors l'élément simple de degré 2 est

$$\begin{aligned} \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i} &= \frac{-1+\frac{i}{2}}{X-i} + \frac{-1-\frac{i}{2}}{X+i} \\ &= \frac{-2X-1}{X^2+1} \end{aligned}$$



Cette méthode ne fonctionne pas si l'élément simple a une puissance > 1 : ainsi

$$2 \frac{X^2-1}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{1}{(X+i)^2}$$

En rassemblant les deux, on retombe sur la formule de départ, qui n'est pas une DES.

- si on doit faire la DES de $\frac{P}{(X^2+bX+c)^m}$, déjà, on n'a pas de chance. Ensuite, on peut s'en sortir à l'aide de divisions euclidiennes successives :

$$P(X) = (X^2 + bX + c)Q(X) + \alpha X + \beta,$$

donc

$$\frac{P(X)}{(X^2 + bX + c)^m} = \frac{Q(X)}{(X^2 + bX + c)^{m-1}} + \frac{\alpha X + \beta}{(X^2 + bX + c)^m}$$

Exemple. DES de $R(X) = \frac{X^4}{(X^2+1)^3}.$

— $X^4 = (X^2+1)(X^2-1) + 1$, donc

$$R(X) = \frac{X^2-1}{(X^2+1)^2} + \frac{1}{(X^2+1)^3}.$$

$$X^2-1 = (X^2+1)1 - 2 \text{ donc}$$

$$R(X) = \frac{1}{X^2+1} - \frac{2}{(X^2+1)^2} + \frac{1}{(X^2+1)^3}.$$

7. penser aux trois « méthodes originales » que l'on a vues : évaluer en un point, multiplier par X et prendre la limite, ou le cas des fractions réelles (coefficients complexes conjugués)

4 Intégrales de fractions rationnelles

TD, exercice 33. Surtout le 1.2.3.

Cahier de calculs, fiche 14. Pour la base du calcul sur les éléments simples.

Cahier de calculs, fiche 25 : de 25.7 à 25.8.

Point de méthode 26

1. Faire la DES de la fraction rationnelle (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$)

2. On calcule l'intégrale de chaque élément simple :

- si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int^x \frac{1}{t - \alpha} dt = \ln(|x - \alpha|)$,
- si $m > 1$, $\int^x \frac{1}{(t - \alpha)^m} = \frac{1}{-m + 1} (X - \alpha)^{-m+1}$,
- $\int^x \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t - a}{t + a} \right|$,
- $\int^x \frac{1}{1 + t^2} dt = \text{Arctan}(x)$,
- $\int^x \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \text{Arctan} \frac{t}{a}$,
- pour calculer $\int^x \frac{dt}{t^2 + bt + c}$ avec $b^2 - 4c < 0$, on passe par la forme canonique,
- pour calculer $\int^x \frac{pt + q}{t^2 + bt + c} dt$ avec $b^2 - 4c < 0$, on fait apparaître la dérivée du dénominateur.
- pour calculer $\int^x \frac{pt + q}{(t^2 + bt + c)^m} dx$ avec $b^2 - 4c < 0$, déjà on n'a pas de chance... On fait ensuite apparaître la dérivée du dénominateur et on se ramène à calculer $\int^x \frac{dt}{(t^2 + bt + c)^m}$. Pour cette intégrale, changement de variables pour se ramener à $\frac{1}{(t^2 + 1)^m}$, et IPP + récurrence. Nous explicitons la récurrence : si $I_m = \int^x \frac{dt}{(t^2 + 1)^m}$, en posant $u(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^m}$ et $v'(t) = 1$,

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{x}{(1 + x^2)^m} - 2m \int^x \frac{t^2}{(1 + t^2)^{m+1}} \\ &= \frac{x}{(1 + x^2)^m} - 2m \int^x \frac{1 + t^2 - 1}{(1 + t^2)^{m+1}} \\ &= \frac{x}{(1 + x^2)^m} + 2m I_m - 2m I_{m+1}. \end{aligned}$$

On a donc une relation de récurrence.

5 Intégrales de fractions en $\sin/\cos/\tan$

TD, exercice 34. 1 et 2 (le reste est dégoûtant).

On veut calculer une intégrale qui est une fraction rationnelle en $\sin/\cos/\tan$, par exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos^2(x)} dx.$$

L'idée est d'opérer un changement de variables qui va nous ramener à une fraction rationnelle. Il existe des règles « toutes faites », dites « règles de Bioche » mais elles ne sont pas au programme et encombrant la tête pour rien.

Point de méthode 27

Si on veut calculer une primitive ou une intégrale d'une fraction rationnelle en $\sin/\cos/\tan$:

- si la fraction peut s'écrire sous la forme $R(\sin(\theta))\cos(\theta)$, alors on pose $t = \sin(\theta)$,
- si la fraction peut s'écrire sous la forme $R(\cos(\theta))\sin(\theta)$, alors on pose $t = \cos(\theta)$,
- si la fraction peut s'écrire sous la forme $R(\tan(\theta))(1 + \tan^2(\theta))$, alors on pose $t = \tan(\theta)$,
- si rien ne marche, on pose $t = \tan(\theta/2)$. Alors $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$.

6 Un résultat théorique important

Proposition 28

Soit P un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, $P(X) = C \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$ avec $C \in \mathbb{K}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$, deux à deux distincts, $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$. Alors

1. $P'(X) = C \sum_{i=1}^r m_i (X - \alpha_i)^{m_i-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq r \\ k \neq i}} (X - \alpha_k)^{m_k}$,
2. $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - \alpha_i}$.

Exemple 29

1. On dit que $\frac{P'}{P}$ est la dérivée logarithmique de P . C'est ce qui correspondrait à la dérivée de « $\ln(P)$ », si P était réel positif.

2. Par exemple, si P est un polynôme tel que

$$\frac{P'}{P} = \frac{3}{X-1} + \frac{2}{X},$$

je sais **automatiquement** que $P = C(X-1)^3 X^2$! C'est satisfaisant, non ?

3. Faisons une fois encore la recherche des $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$. En fait, si $P'|P$, on sait que l'on dispose de Q de degré 1 tel que $P = QP'$. On dispose donc de $\lambda \in \mathbb{K}$ et de $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $P = \lambda(X - \alpha)P'$.

Notons alors $n = \deg(P)$. En regardant les coefficients dominants de P et de P' , on en déduit que $\lambda = \frac{1}{n}$. Ainsi, $P = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'$. Donc

$$\frac{P'}{P} = \frac{n}{X - \alpha}$$

Par le résultat précédent, on en déduit que $P = C(X - \alpha)^n$.

La dernière application, je la trouve particulièrement jolie... mais on est sur du hors-programme culturel, pas besoin du tout de lire cela pour ce chapitre !

Définition 30

Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est dans l'enveloppe convexe de $(z_1, \dots, z_n)$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tels que

$$z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Remarque 31

Il faut voir cette définition comme signifiant que z est « à l'intérieur » du polygone formé par les points $(z_1, \dots, z_n)$, ou que z est une moyenne des points $(z_1, \dots, z_n)$.

Théorème 32 (Théorème de Gauss-Lucas – Hors-Programme complet !)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Démonstration

Écrivons $P(X) = \Lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$. Soit z une racine de P' .

- si z est une racine de P , c'est ok !

- sinon, $P'(z) = 0$ donc $\frac{P'(z)}{P(z)} = 0$. Donc, par la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{z - \alpha_k},$$

donc, en multipliant chaque fraction de la somme par la quantité conjuguée,

$$\sum_{k=1}^r \frac{m_k(\bar{z} - \overline{\alpha_k})}{|z - \alpha_k|^2} = 0,$$

donc, en conjuguant,

$$\sum_{k=1}^r \frac{m_k(z - \alpha_k)}{|z - \alpha_k|^2} = 0,$$

Posons alors $\mu_k = \frac{m_k}{|z - \alpha_k|^2}$. Alors

$$\sum_{k=1}^r \mu_k(z - \alpha_k) = 0,$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^r \mu_k z = \sum_{k=1}^r \mu_k \alpha_k$$

donc

$$z = \sum_{k=1}^r \frac{\mu_k}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \alpha_k = \sum_{k=1}^r \lambda_k \alpha_k,$$

avec $\lambda_k = \frac{\mu_k}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \in [0, 1]$, et $\sum_{k=1}^r \lambda_k = 1$.

D'où le résultat ! ■