

TD en vraie autonomie – 22/04

Presque tous les corrigés sont sur cahier-de-prépa. Pour les 3 exos en plus, il y a une indication et un corrigé.

1 Liste des exercices

Fractions rationnelles En fonction de ce que vous avez fait de vos vacances, n'hésitez pas à passer du temps à **pratiquer** les décompositions en éléments simples et calculs d'intégrales. Voici quelques conseils :

- **Cahier de calculs**, fiche 25. (disponible sur cahier-de-prépa) :
 - calculs bruts 25.1, 25.2, 25.4
 - calculs d'intégrales 25.7
- **TD 16** (disponible sur cahier-de-prépa)
 - exercice 10
 - exercice 34 (f_1, f_2, f_3)
 - exercice 35
 - exercice 36
- Exo en plus 1 (je l'ai donné en colle en MPSI2) :
Soit P scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ses racines.
Démontrer que $\sum_{k=1}^n \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} = 0$.

Dénombrement. Je vous ai déjà conseillé quelques exercices, mais voici ce que vous pouvez faire.

- **TD 17.** Exercice 12 (très bien comme bilan)
- (Exo en plus 2)
Soit E un ensemble fini. On note $|A|$ le cardinal de A . Calculer $\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} |A|$.
- (Exo en plus 3)
Soit $0 \leq k \leq n$ deux entiers. Montrer que

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

par le calcul, puis par une preuve par dénombrement.

Indications.

Exo en plus 1. Montrer que P' est scindé à racines simples, puis écrire $\frac{P''}{P'}$ grâce aux racines de P' (DES de $\frac{Q'}{Q}$), et intervertir des sommes !

Exo en plus 2. Regrouper la somme par paquets, en fonction du cardinal de $|A|$.

Exo en plus 3. Pour la preuve par dénombrement, considérer E un ensemble à n éléments et

$$\mathcal{C} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \text{Card}(A) = k \text{ et } B \subset A\}.$$

Corrigé des exercices en plus.

Exo en plus 1. On pose $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ les racines de P' (P' est srs par le théorème de Rolle!). Alors

$$\frac{P''}{P'} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{X - \beta_i}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha_k - \beta_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k - \beta_i} \end{aligned}$$

Dans la somme intérieure, on reconnaît $\frac{P'}{P}$, c'est magique! DOn

$$\sum_{k=1}^n \frac{P''(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P'(\beta_i)}{P(\beta_i)} = 0.$$

Tadaaam !

Exo en plus 2. On va regrouper nos sommes ! On note $\mathcal{P}_k(E)$ les parties de E possédant k éléments. On sait qu'il y a $\binom{n}{k}$ parties de E à k éléments. On a aussi

$$\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{0 \leq k \leq n} \mathcal{P}_k(E).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} |A| &= \sum_{k=0}^n \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} |A| \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \\ &= n2^{n-1}. \end{aligned}$$

Le dernier calcul **n'est pas immédiat**, il faut faire un lemme des chefs ou une dérivée, cf. TD 2 !

Exo en plus 3.

- **Par le calcul.** On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} &= \sum_{i=0}^k \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \\
 &= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \\
 &= \binom{n}{k} 2^k. \quad (\text{binôme de Newton})
 \end{aligned}$$

- **Par le dénombrement.** Soit E un ensemble à n éléments et

$$\mathcal{C} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, |A| = k \text{ et } B \subset A\}.$$

On peut dénombrer $\mathcal{C}$ de deux façons.

— Choisir un élément de $\mathcal{C}$, (A, B) , c'est

- choisir une partie $A \in \mathcal{P}_k(E)$: il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
- **puis** choisir une partie $B \in \mathcal{P}(A)$: il y a 2^k possibilités.

$$\text{D'où } \text{Card}(\mathcal{C}) = \binom{n}{k} 2^k.$$

— Mais on a aussi

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{i=0}^k \mathcal{C}_i,$$

où

$$\mathcal{C}_i = \{(A, B) \in \mathcal{P}_k(E) \times \mathcal{P}_i(E), B \subset A\}.$$

Or, choisir (A, B) dans $\mathcal{C}_i$, c'est

- choisir $B \in \mathcal{P}_i(E)$: $\binom{n}{i}$ possibilités ;
- puis choisir $A \setminus B \in \mathcal{P}_{k-i}(E \setminus A)$: $\binom{n-i}{k-i}$ possibilités.

$$\text{On a donc } \text{Card}(\mathcal{C}_i) = \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}.$$

$$\text{On en déduit donc que } \text{Card}(\mathcal{C}) = \sum_{i=0}^k \text{Card}(\mathcal{C}_i) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}.$$

D'où le résultat désiré !