

# MPSI1 – Programme de colles – Semaine 24 – du 22 au 26 avril 2024

## Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Cardinal d'un ensemble fini</b>	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $ A $ , $\text{Card}(A)$ . Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.	
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
<b>b) Listes et combinaisons</b>	
Nombre de $p$ -listes (ou $p$ -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal $n$ , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal $n$ .	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal $p$ dans un ensemble de cardinal $n$ .
Nombre de parties à $p$ éléments (ou $p$ -combinaisons) d'un ensemble de cardinal $n$ .	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

## Polynômes et fractions rationnelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>h) Fractions rationnelles</b>	
Corps $\mathbb{K}(X)$ . Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.
<b>i) Décomposition en éléments simples sur <math>\mathbb{C}</math> et sur <math>\mathbb{R}</math></b>	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ .	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées $k$ -ièmes.
Si $\lambda$ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X - \lambda}$ .	
Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ .	

## Organisation de la colle

- Cours de dénombrement et fractions rationnelles.
- Exercices : c'est le patchwork ! Sont possibles des exercices de fractions rationnelles (et révisions de polynômes), de dénombrement, et éventuellement de révisions de dimension finie.

## Exemples de questions de cours

1. Définition des listes, arrangements, combinaisons.
  2. Preuve dénombrabiliste d'une de ces identités : on n'insistera pas sur l'établissement de bijections.
    - (i) la symétrie des coefficients binomiaux  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
    - (ii) la formule de Pascal :  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$
    - (iii) la formule  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
    - (iv) le « lemme des chefs » (présentation vraiment avec les mains) :  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
    - (v) la formule de Vandermonde  $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$
  3. Existence, unicité de la représentation irréductible d'une fraction rationnelle.
  4. Description des décompositions en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ , sur  $\mathbb{R}$ .
  5. Formule pour les coefficients des pôles simples.
  6. Décomposition en éléments simples de  $P'/P$ .
-