MPSI1 – Programme de colles – Semaine 25 – du 29 avril au 3 mai 2024

Probabilités

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y) = (x,y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Espérance $\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A)=P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big)=\sum\limits_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$. Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.
c) Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

Organisation de la colle

— Cours de probabilités.

— Exercices de probabilités. Tout exercice doit mettre en jeu des variables aléatoires.

Exemples de questions de cours

1. Définition de la loi d'une variable aléatoire + ceci définit bien une loi de probabilité.
2. Lemme des coalitions (2 variables).
3. La somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p suit une loi binomiale de paramètres (n, p).
4. Formule de transfert.
5. Linéarité de l'espérance.
6. Lien entre espérance et indépendance.
7. Espérance d'une variable uniforme sur $[\![a, b]\!]$, d'une variable de Bernoulli, d'une binomiale.
8. Définition de la variance + formule de Koenig-Huygens.
9. Variance d'une variable uniforme sur $[\![1, n]\!]$, d'une variable de Bernoulli.
10. Variance et indépendance, application au calcul de la variance d'une binomiale.
11. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance. Cas d'égalité.
12. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebycheff.
13. Inégalité préparatoire à la loi faible des grands nombres : si $X_1, \dots, X_n$ sont n vaiid d'espérance commune m, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right|\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\varepsilon^2}$