

DM 16

À rendre sur cahier-de-prépa pour, au plus tard, le 30 avril

Formules.

1. le minimum : problème 1, questions 1-5 ; problème 2, questions 1-4. Temps conseillé : 2h30
2. premier prolongement : un peu plus de probas élémentaires avec la fin du problème 1
3. deuxième prolongement (+ intéressant) : la fin du problème 2
4. troisième prolongement : l'exercice de la toute fin

Problème 1. Marches sur des graphes

On appellera « graphe » tout dessin du type de l'un des deux exemples G_1 (ci-dessous) et G_2 (en page 2). Les sommets du graphe sont les cercles numérotés (de 1 à 3 dans le premier exemple, de 1 à 5 dans le second). Les flèches du graphe sont les flèches reliant deux sommets. On remarquera les points suivants :

- entre deux sommets distincts i et j , on peut avoir une flèche de i vers j et une de j vers i
- certains couples de sommets ne sont pas reliés par une flèche (par exemple 1 et 4 dans le graphe G_2)
- une flèche peut relier un sommet à lui-même (c'est le cas du sommet 3 de G_1) ;
- pour tout couple (i, j) de sommets, la flèche allant de i à j est étiquetée par un réel $s_{i,j} \in [0, 1]$, représentant une probabilité de saut (par exemple $s_{3,1} = \frac{1}{4}$ et $s_{3,3} = \frac{1}{2}$ dans le graphe G_1)
- pour tout sommet i , la somme des probabilités étiquetant les flèches partant de i vaut 1.

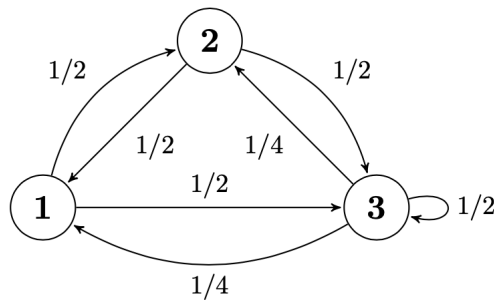
Une particule est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet i d'un graphe G . Elle saute aléatoirement à l'instant $n = 1$ sur un autre sommet de G en suivant une des flèches partant de i , la probabilité qu'elle suive la flèche de i vers j étant égale à $s_{i,j}$. On poursuit ainsi le processus, la particule sautant à chaque instant suivant, $n = 2, 3, 4 \dots$ du sommet du graphe où elle se trouve vers un nouveau sommet (éventuellement le même) en suivant aléatoirement l'une des flèches selon les probabilités indiquées.

On suppose que les sommets du graphe G sont numérotés de 1 à m . Le processus décrit ci-dessus définit une suite $\mathcal{A} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \dots, m\}$ telle que pour tout n on a $X_n = k$ si la particule se trouve sur le sommet k du graphe G après le $n^{\text{ème}}$ saut. $\mathcal{A}$ est appelée marche aléatoire sur le graphe G .

On étudie dans cette question quelques propriétés de la marche aléatoire sur le graphe G_1 ci-dessous.

Correction

Une remarque : partie vraiment peu théorique, mais très calculatoire : **attention à la manière de mener vos calculs !**



Graphe G_1

1. On considère la marche aléatoire sur G_1 partant de $X_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le vecteur colonne $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_n , établir une relation matricielle entre Y_{n+1} et Y_n de la forme $Y_{n+1} = AY_n$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Correction

Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. On sait qu'à l'instant n , la particule est en 1, 2 ou 3, donc $(\{X_n = 1\}, \{X_n = 2\}, \{X_n = 3\})$ est un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = 3)\mathbb{P}(X_n = 3).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 3)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 3)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 3)$$

On en déduit que

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = AY_n,$$

$$\text{avec } A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que, pour tout n entier naturel, $Y_n = A^n Y_0$.

Correction

On démontre le résultat par récurrence sur n :

Initialisation. $Y_0 = A^0 Y_0$ car $A^0 = I_3$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Y_n = A^n Y_0$. Alors, par la question précédente, $Y_{n+1} = AY_n = A \times A^n Y_0 = A^{n+1} Y_0$, d'où l'hérédité et le résultat.

3. Donner, pour $n \geq 1$, $P(X_n = 3)$. Justifier votre réponse.

Correction

Soit $n \geq 1$. Alors

$$\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 2) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 3)) = \frac{1}{2},$$

car X_{n-1} est à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, donc $\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 2) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 3) = 1$.

Ainsi, $(\mathbb{P}(X_n = 3))_{n \geq 1}$ est constante égale à $\frac{1}{2}$.

4. (a) Calculer A^2 , puis $A^2 \times (2A - I)$ (où I est la matrice identité d'ordre 3). En déduire la relation $A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A$.

Correction

On calcule

$$A^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A^2 \times (2A - I) &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

Ainsi, $2A^3 = A^2 + A$, donc $A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A$.

- (b) En déduire l'existence de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = u_n A^2 + v_n A$.

Correction

On démontre la proposition par récurrence sur n .

Initialisation. $A = 0 \times A^2 + A$. On pose $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que la proposition est vraie. Alors on dispose de u_n et v_n tels que $A^n = u_n A^2 + v_n A$. Mais alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= u_n A^3 + v_n A^2 \\ &= u_n \left(\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A \right) + v_n A^2 \\ &= \frac{u_n + 2v_n}{2} A^2 + \frac{u_n}{2} A. \end{aligned}$$

On pose alors $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n}{2}$. On en déduit alors le résultat !
Donc la proposition est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

- (c) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_n et v_n .

Correction

On remarque assez facilement que si $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n + v_n)$ est constante égale à $u_0 + v_0 = 1$. On en déduit donc que, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1 - v_n}{2}.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On cherche c tel que $c = \frac{1 - c}{2}$. On trouve $c = \frac{1}{3}$. Donc $(v_n - c)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} (v_1 - c) + c = \frac{(-1)^{n-1}}{3 \times 2^{n-2}} + \frac{1}{3},$$

et

$$u_n = 1 - v_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^{n-2}}.$$

5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul la loi de X_n .

Correction

On en déduit donc que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Y_n &= A^n Y_0 \\ &= (u_n A^2 + v_n A) Y_0 \\ &= u_n \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_n \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} u_n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

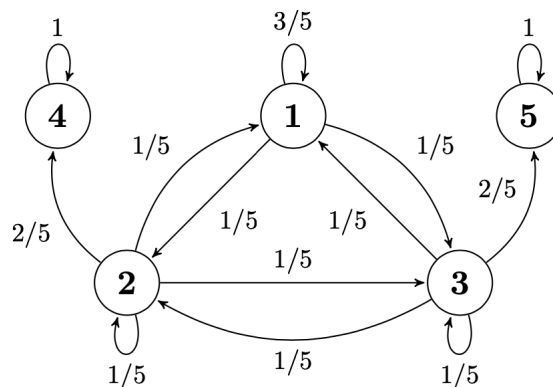
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{3}{8} u_n = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{8} u_n + \frac{1}{2} v_n \underbrace{=}_{u_n + v_n = 1} \frac{1}{8} + \frac{3}{8} v_n = \frac{1}{8} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} v_n = \frac{1}{2}.$$

(on vérifie bien que la somme des trois probabilités donne 1)

On considère maintenant une marche aléatoire $\mathcal{A}_2 = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le graphe G_2 ci-dessous.



Graphe G_2

On constate que lorsque la particule atteint le sommet 4 ou le sommet 5, elle y reste ensuite indéfiniment avec une probabilité 1 : ces deux sommets sont dits absorbants. On dit que la marche aléatoire est absorbée en 4 ou en 5 lorsqu'elle atteint le sommet correspondant. On s'intéresse ici à la probabilité pour $\mathcal{A}_2$ d'être absorbée en 4 ou en 5 en fonction de son point de départ. Pour tout couple d'entiers (i, j) avec $1 \leq i \leq 5$ et $4 \leq j \leq 5$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée en j sachant que $X_0 = i$.

6. Donner les valeurs des $a_{i,j}$ dans le cas particulier $(i, j) \in \{4, 5\}^2$.

Correction

Si la particule est en 4, elle reste en 4 donc est absorbée par 4 et ne peut être absorbée par 5 donc $a_{44} = 1$ et $a_{54} = 0$.
De même, $a_{55} = 1$ et $a_{45} = 0$.

7. En distinguant les cas selon le résultat du prochain saut de la particule, montrer que $(x, y, z) = (a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$ est un triplet solution du système

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = x \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} = y \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = z \end{cases}$$

Résoudre le système.

Correction

On note B_4 l'événement « la particule est absorbée en 4 ». Si $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$,

$$a_{i4} = \mathbb{P}(B_4 | X_0 = i) = \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4).$$

Or, $\{X_1 = 1\}, \{X_1 = 2\}, \{X_1 = 3\}, \{X_1 = 4\}, \{X_1 = 5\}$ est un système complet d'événements. Donc, par la formule des probabilités totales,

$$a_{i4} = \sum_{k=1}^5 \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \cap X_1 = k)$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \cap X_1 = k) &= \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap \{X_1 = k\} \cap \{X_0 = i\})}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{\{X_1=k\} \cap \{X_0=i\}}(B_4) \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \mathbb{P}_{\{X_1=k\} \cap \{X_0=i\}}(B_4) \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = k), \end{aligned}$$

par la formule des probabilités composées.

Or,

$$\mathbb{P}_{\{X_1=k\} \cap \{X_0=i\}}(B_4) = \mathbb{P}_{\{X_1=k\}}(B_4),$$

car l'absorption en 4 dépend uniquement de la dernière position connue de la particule. De plus, la marche aléatoire étant invariante par translation (le résultat ne change pas si on la commence à 1 plutôt qu'à 0), on peut aussi dire que $\mathbb{P}_{\{X_1=k\}}(B_4) = a_{k,4}$. Ainsi,

$$a_{i4} = \sum_{k=1}^5 \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = k) a_{k4}, \text{ d'où } \begin{cases} a_{14} = \frac{3}{5}a_{14} + \frac{1}{5}a_{24} + \frac{1}{5}a_{34} \\ a_{24} = \frac{1}{5}a_{14} + \frac{1}{5}a_{24} + \frac{1}{5}a_{34} + \frac{2}{5} \\ a_{34} = \frac{1}{5}a_{14} + \frac{1}{5}a_{24} + \frac{1}{5}a_{34} \end{cases}$$

D'où le système demandé. On résout alors, en posant $(x, y, z) = (a_{14}, a_{24}, a_{34})$.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 4y + z = -2 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 4z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x - 4y + z = -2 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ -5y + 5z = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y - 7z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ -5y + 5z = -2 \\ -4z = -\frac{6}{5} & L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5}L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $a_{3,4} = z = \frac{3}{10}$, $a_{2,4} = y = \frac{7}{10}$ et $a_{1,4} = x = \frac{1}{2}$.

8. Donner, par un argument sur la géométrie du graphe ne nécessitant aucun calcul supplémentaire, les valeurs de $(a_{1,5}, a_{2,5}, a_{3,5})$

Correction

On remarque que le graphe est symétrique entre 4 et 5 si on inverse 2 et 3. Ainsi, $a_{1,5} = \frac{1}{2}$, $a_{2,5} = \frac{3}{10}$ et $a_{3,5} = \frac{7}{10}$.

9. Montrer que la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée (en 4 ou en 5 indifféremment) est égale à 1, quel que soit son point de départ.

Correction

On note B_5 l'événement « la particule est absorbée en 5 ». On cherche, si i dans $\llbracket 1, 5 \rrbracket$, $\mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \sqcup B_5)$. Par union disjointe, $\mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \sqcup B_5) = \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4) + \mathbb{P}_{X_0=i}(B_5) = a_{i4} + a_{i5}$. Or,

- $a_{14} + a_{15} = 1/2 + 1/2 = 1$,
- $a_{24} + a_{25} = 7/10 + 3/10 = 1$,
- $a_{34} + a_{35} = 3/10 + 7/10 = 1$,
- $a_{44} + a_{45} = 1 + 0 = 1$,
- $a_{45} + a_{55} = 0 + 1 = 1$.

Ainsi, quel que soit i , $\mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \sqcup B_5) = 1$, ce qui est le résultat recherché.

10. On suppose que la loi de X_0 est uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, et on constate que $\mathcal{A}_2$ est absorbée en 4. Quelle est la probabilité qu'elle soit partie du sommet 3?

Correction

On recherche $\mathbb{P}_{B_4}(X_0 = 3)$. On utilise la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{B_4}(X_0 = 3) &= \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap \{X_0 = 3\})}{\mathbb{P}(B_4)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{X_0=3}(B_4)\mathbb{P}(X_0 = 3)}{\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4)\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \frac{a_{34} \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}(a_{14} + a_{24} + a_{34})} \\ &= \frac{a_{34}}{a_{14} + a_{24} + a_{34}} = \frac{3}{5 + 7 + 3} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}_{B_4}(X_0 = 3) = \frac{1}{5}$.

Problème 2. Inégalités de concentration

Dans ce problème, on considère $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X où X est une variable aléatoire à valeurs réelles, d'espérance μ , de variance $\sigma^2 > 0$. De plus, pour tout entier $n > 0$, et pour tout réel x , on suppose

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geq -x\right).$$

A. Questions préliminaires

- Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Puis démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Correction

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

Ensuite,

$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Par indépendance mutuelle de $(X_1, \dots, X_n)$,

$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, si $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \mu)\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \frac{\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.\end{aligned}$$

2. Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la variable $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq 1\right) \right] = -\ln(2)$$

Correction

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On remarque que, comme X_i est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, $X_i + 1$ est à valeurs dans $\{0, 2\}$, donc $\frac{X_i + 1}{2}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$: il s'agit donc d'une variable de Bernoulli, de paramètre $p = \mathbb{P}\left(\frac{X_i + 1}{2} = 1\right) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$.

De plus, les variables $\left(\frac{X_i + 1}{2}\right)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes, donc $\sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$.

Ainsi, si l'on note $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq 1\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq \frac{n}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \sqcup \{S_n = n\}) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} \ln \left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq 1\right) \right] = \frac{1}{n} \times -(n-1) \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2).$$

B. Une loi des grands nombres logarithmique

On revient maintenant au cas général. On considère deux entiers strictement positifs n et q et deux réels strictement positifs ε_1 et ε_2 .

3. Justifier que les deux variables aléatoires $\sum_{i=1}^n X_i$ et $\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i$ sont indépendantes, puis établir que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon_1\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geq \varepsilon_2\right)$$

Correction

On sait que $(X_1, \dots, X_{n+q})$ sont mutuellement indépendantes, donc, d'après le lemme des coalitions, $\sum_{i=1}^n X_i$ et $\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i$ sont indépendantes.

Ensuite, on remarque que pour tout ω dans Ω ,

$$\sum_{i=1}^n X_i(\omega) \geq \varepsilon_1 \text{ et } \sum_{i=n+1}^{n+q} X_i(\omega) \geq \varepsilon_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+q} X_i(\omega) \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon_1\right\} \cap \left\{\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geq \varepsilon_2\right\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right).$$

Donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon_1\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geq \varepsilon_2\right)$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geq \varepsilon\right).$$

Prouver que pour tout $n \geq 1$ et tout $q \geq 1$, $u_{n+q} \geq u_n u_q$.

Correction

Soit $n \geq 1$ et $q \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+q} &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n+q} \sum_{i=1}^{n+q} (X_i - \mu) \geq \varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} (X_i - \mu) \geq n\varepsilon + q\varepsilon\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq n\varepsilon\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geq q\varepsilon\right) \text{ en prenant } \varepsilon_1 = n\varepsilon \text{ et } \varepsilon_2 = q\varepsilon \text{ dans la question précédente} \\ &\geq u_n \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geq q\varepsilon\right) \end{aligned}$$

Mais $(X_1, \dots, X_{n+q})$ sont iid, donc $\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i$ a la même loi que $\sum_{i=1}^q X_i$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geq q\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^q X_i \geq q\varepsilon\right) = u_q.$$

Donc $u_{n+q} \geq u_n u_q$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X - \mu \geq \varepsilon) > 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$. On pose alors $\alpha_n = -\ln(u_n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$ et tout $q \geq 1$,

$$0 \leq \alpha_{n+q} \leq \alpha_n + \alpha_q.$$

Correction

Par l'hypothèse qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X - \mu \geq \varepsilon) > 0$, on en déduit que $u_1 > 0$. Mais, par la question précédente, et par récurrence immédiate, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_1^n > 0$. Ensuite, si $n \geq 1$ et $q \geq 1$,

$$u_{n+q} \geq u_n u_q \text{ donc } -\ln(u_{n+q}) \leq -\ln(u_n) - \ln(u_q),$$

donc $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n + \alpha_q$. Enfin, comme u_n est une probabilité, $u_n \leq 1$, donc $-\ln(u_n) \geq 0$,

donc $\alpha_n \geq 0$ pour tout n .

6. Soit un entier $q \geq 1$, on pose $\beta_q = \sup \{\alpha_r, 1 \leq r < q\}$. Montrer que, pour tout entier $k \geq q$, on a

$$\frac{\alpha_k}{k} \leq \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{k}.$$

Indication : on pourra utiliser la division euclidienne de k par q .

Correction

C'est une question déjà faite dans un précédent DS ! Soit $k \geq q$. Alors on écrit $k = qs + r$, avec $s \in \mathbb{N}$ et $r \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$. Ainsi,

$$\alpha_k \leq \alpha_{qs} + \alpha_r \leq s\alpha_q + \alpha_r,$$

par sous-additivité. On en déduit que

$$\frac{\alpha_k}{k} \leq \frac{s\alpha_q}{k} + \frac{\alpha_r}{k}$$

Mais $qs \leq k$ donc $\frac{s}{k} \leq \frac{1}{q}$ et $\alpha_r \leq \beta_q$, donc

$$\frac{\alpha_k}{k} \leq \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{k}.$$

7. En déduire que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\inf \left\{ \frac{\alpha_k}{k}, k \geq 1 \right\}$.
On reviendra à la définition epsilonlesque de la borne inférieure.

Correction

Notons $\ell = \inf \left\{ \frac{\alpha_k}{k}, k \geq 1 \right\}$. Déjà ℓ est un réel positif. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\alpha_q}{q} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $k \geq q$. On sait que

$$\frac{\alpha_k}{k} \leq \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{k} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta_q}{k}$$

Comme $\frac{\beta_q}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, soit K_0 tel que pour tout $k \geq K_0$, $\frac{\beta_q}{k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $k \geq K_0$. Alors

$$\ell \leq \frac{\alpha_k}{k} \leq \ell + \varepsilon.$$

On a démontré que $\forall \varepsilon > 0, \exists K_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq K_0, \left| \frac{\alpha_k}{k} - \ell \right| \leq \varepsilon$. Cela signifie exactement que $\frac{\alpha_k}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \ell$.

8. Déduire des questions précédentes que la suite de terme général

$$-\frac{1}{n} \ln \left[\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right| \geq \varepsilon \right) \right]$$

admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Puis comparez ce résultat avec celui des questions préliminaires.

Correction

Déjà, par hypothèse,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right| \geq \varepsilon \right) &= \mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geq \varepsilon \right) + \mathbb{P} \left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geq \varepsilon \right) \\ &= 2\mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geq \varepsilon \right) \end{aligned}$$

On sait que $\frac{\alpha_k}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+$, ce qui signifie que

$$-\frac{1}{n} \ln \left[\mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geq \varepsilon \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

D'où, par les deux égalités précédentes,

$$-\frac{1}{n} \ln \left[\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right| \geq \varepsilon \right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Si $\ell \neq 0$, ce résultat est plus fort que celui de la question 1, car, s'il permet toujours de dire que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il permet de quantifier à quel point cette quantité tend vers 0. On sait que

$$\ln \left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right| \geq \varepsilon\right) \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n\ell,$$

ce qui assure presque une décroissance exponentielle vers 0.

Si $\ell = 0$, il faudrait avoir un équivalent en n de la quantité pour pouvoir dire quelque chose de pertinent !

C. Cas borné

Pour finir, on suppose que X est à valeurs dans un intervalle $[a, b]$. On note toujours μ son espérance.

9. Soit Y une variable aléatoire centrée, à valeurs dans $[-1, 1]$. Démontrer que pour tout $\gamma \in [-1, 1]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\gamma} \leq \frac{1}{2}(1 - \gamma)e^{-t} + \frac{1}{2}(1 + \gamma)e^t,$$

puis en déduire que $\mathbb{E}(e^{tY}) \leq \text{ch}(t)$. On admet que, par une étude de fonctions, $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
On a donc $\mathbb{E}(e^{tY}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

Correction

Déjà, par convexité de l'exponentielle,

$$e^{t\gamma} = e^{-t \times \frac{1}{2}(1-\gamma) + t \times \frac{1}{2}(1+\gamma)} \leq \frac{1}{2}(1 - \gamma)e^{-t} + \frac{1}{2}(1 + \gamma)e^t,$$

car $\frac{1}{2}(1 - \gamma) + \frac{1}{2}(1 + \gamma) = 1$. Ainsi, pour tout ω dans Ω ,

$$e^{tY(\omega)} \leq \frac{1}{2}(1 - Y(\omega))e^{-t} + \frac{1}{2}(1 + Y(\omega))e^t$$

Par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}(e^{tY}) \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(1 - Y)e^{-t} + \frac{1}{2}(1 + Y)e^t\right] = \frac{e^{-t} + e^t}{2},$$

car Y est centrée, donc d'espérance nulle.

10. En considérant $Y = \frac{X - \mu}{b - a}$, vérifier que Y est centrée et à valeurs dans $[-1, 1]$ et en déduire que pour tout t réel,

$$\mathbb{E}(e^{t(X-\mu)}) \leq e^{\frac{t^2(b-a)^2}{2}}.$$

Correction

Déjà, comme $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{b-a}\mathbb{E}(X - \mu) = 0$, donc Y est centrée. Ensuite, comme $a \leq X \leq b$, $a - \mu \leq X - \mu \leq b - \mu$, $-(b-a) \leq -(\mu-a) \leq 0$ et $b - \mu \leq b - a$, donc $\frac{X - \mu}{b - a} \in [-1, 1]$.

Donc, par la question précédente, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{E}\left(e^{t \frac{X - \mu}{b - a}}\right) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

En posant $s = \frac{t}{b - a}$, et comme $t \mapsto \frac{t}{b - a}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que pour tout $s > 0$,

$$\mathbb{E}\left(e^{s(X - \mu)}\right) \leq e^{\frac{(b-a)^2 s^2}{2}}.$$

11. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant le résultat de la question précédente, appliquée à la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$, et en choisissant un t convenable, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2(b-a)^2}\right),$$

puis majorer $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)\right| \geq \varepsilon\right)$. Comparer avec le résultat de la question 8.

Correction

On remarque que si $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(t \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \geq tn\varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\exp\left(t \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)\right) \geq e^{tn\varepsilon}\right) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{t(X_k - \mu)}\right)}{e^{tn\varepsilon}} \\ &\leq \prod_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}(e^{t(X_k - \mu)})}{e^{tn\varepsilon}} \text{ par indépendance de } X_1, \dots, X_n \\ &\leq e^{n \frac{t^2(b-a)^2}{2} - tn\varepsilon}. \end{aligned}$$

On essaie alors de minimiser le polynôme $Q(t) = n \frac{t^2(b-a)^2}{2} - tn\varepsilon$. Son minimum est atteint en $\frac{\varepsilon}{2 \frac{(b-a)^2}{2}} = \frac{\varepsilon}{(b-a)^2}$, et vaut

$$Q\left(\frac{\varepsilon}{(b-a)^2}\right) = n \frac{\varepsilon^2}{2(b-a)^2} - n \frac{\varepsilon^2}{(b-a)^2} = -n \frac{\varepsilon^2}{2(b-a)^2}.$$

Ceci nous permet d'obtenir la majoration désirée : elle est plus forte que la limite précédente, étant donné qu'elle permet de « passer les équivalents à l'exponentielle » .

Exercice 1. *Court, mais festif.* Soit $(G, *)$ un groupe abélien fini, X une variable aléatoire uniforme sur G , Y une variable aléatoire quelconque sur G , indépendante de X . Démontrer que $X * Y$ est uniforme sur G .

Correction

Soit $g \in G$. Alors $\{X = h\}_{h \in G}$ est un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X * Y = g) &= \sum_{h \in G} \mathbb{P}(X * Y = g, X = h) \\ &= \sum_{h \in G} \mathbb{P}(Y = h^{-1} * g, X = h) \\ &= \sum_{h \in G} \mathbb{P}(Y = h^{-1} * g) \mathbb{P}(X = h) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{h \in G} \mathbb{P}(Y = h^{-1} * g) \frac{1}{\text{Card}(G)} \\ &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{k \in G} \mathbb{P}(Y = k) \text{ car } h \mapsto h^{-1}g \text{ est une bijection de } G \\ &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \text{ car } Y \text{ est à valeurs dans } G\end{aligned}$$

Donc $X * Y$ est uniforme. Étonnant, non ?