MPSI1 – Programme de colles – Semaine 26 – du 13 au 17 mai 2024

Matrices

A - Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
c) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

B - Changements de bases, équivalence et similitude

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\text{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$.	Notation $\text{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

Organisation de la colle Cours et exercices sur les matrices.

Exemples de questions de cours

1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-evdf de dimensions finies, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{E}$ une base de E, $\mathscr{F}$ une base de F. Alors u est bijective (inversible) si et seulement si $\text{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$ est inversible.
2. Une famille $\mathscr{B}$ de n vecteurs est une base si et seulement si $\text{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{B})$ est inversible.
3. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-evdf de dimensions respectives p et n, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{E}$ une base de E, $\mathscr{F}$ une base de F, $A = \text{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors une matrice $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à A si et seulement si il existe deux bases $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{F}'$ de E et F telles que $B = \text{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{F}'}(u)$.
4. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-evdf, $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $r \in \mathbb{N}$, $r \leq \min(n,p)$, $u \in \mathscr{L}(E,D)$. Alors $\text{rg}(u) = r$ ssi $\exists\, \mathscr{E}$ base de E, $\mathscr{F}$ base de F telles que $\text{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = J_{n,p,r}$.
5. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
6. Le rang d'une matrice est la taille de la plus grande matrice extraite inversible.
7. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, si $\mathscr{E}$ est une base de E, si $A = \text{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$, si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = \dim(E)$, alors A et B sont semblables si et seulement s'il existe $\mathscr{E}'$ base de E telle que $B = \text{Mat}_{\mathscr{E}'}(u)$.
8. Définition de la trace d'un endomorphisme (et vérifier qu'elle est effectivement bien définie).
9. Représentation d'un projecteur, d'une symétrie, dans une bonne base. Le rang d'un projecteur égale sa trace.

Quelques exercices importants ou formateurs (en plus des exercices « corrigés en classe » du TD) faits dans le cours.

Faites-vous votre propre liste !

1. image, rang, noyau de la matrice constituée de 1 uniquement
2. rang et image de $U \times V^T$ où U et V sont des vecteurs colonne. CNS pour que l'on ait un projecteur.
3. inversibilité de la matrice de Vandermonde (CNS via l'application linéaire $P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$).
4. inversibilité et expression de l'inverse de la matrice de terme général $\binom{j-1}{i-1}$.
5. toute matrice non inversible est équivalente à une matrice nilpotente.
6. si $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, vérifiant $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $\text{rg}(A)$, $rg(B)$, $B \times A$.
7. déterminer la trace de l'application $A \mapsto A^\top$.