N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 22
Séries

1 Généralités

1.1 Séries convergentes, divergentes

Notre but est d'étudier des **séries**, c'est-à-dire des « sommes infinies ». Comme nous avons bien avancé dans l'année, bien sûr que nous n'allons pas parler de sommes infinies.

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1. La **série de terme général** (parfois abrégé en stg) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **suite** $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On note parfois $\sum u_n$ la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (**cf. remarque ci-dessous**)
3. Si $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée n-ième somme partielle.
4. On dit que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers une limite finie ℓ. On note alors $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et on l'appelle « somme de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ » .
   Sinon, on dit qu'elle diverge.
5. Si la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, le reste d'ordre n est
$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 2

Attention, la notation $\sum u_n$ est une **notation**, parfois très piégeuse, car il y a une variable non déclarée, ne **JAMAIS** utiliser $\sum u_n$ dans un calcul.

Exemple 3

1. On sait que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Ainsi, la série de terme général $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. On appelle la série harmonique $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de terme général $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On a déjà vu (3 ? 4 fois ?) que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Nous allons le redémontrer, mais c'est un bon moment pour essayer de vous rappeler une des méthodes vues en classe à ce sujet ?

Par linéarité de la limite, on a la

Proposition 4

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge, alors $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\ell' = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k + \mu v_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'.$$

Ceci conclut la preuve. ■

Comment être sûr qu'une série ne converge pas ? Grâce à la

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

2. **Si** la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge, **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$.

2. Si la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge, alors on dispose de $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On en conclut que $u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.

Ceci conclut la preuve. ■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge grossièrement**.

Remarque 7

Attention ! La réciproque est très très fausse ! $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **MAIS** on n'a pas $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge !

De cette proposition, on déduit la

Proposition 8 (Séries géométriques)

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors

1. si $|a| \geqslant 1$, la série de terme général $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.
2. si $|a| < 1$, la série de terme général $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-a}$.

Démonstration

. Déjà, si $|a| \geqslant 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum a^n$ diverge grossièrement. . Ensuite, si $|a| < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a}.$$

■

Exercice 9

Démontrer que $0,9999\cdots = 1$ (où il y a une infinité de 9 à gauche).

L'étude des séries est fondamentalement lié à celle des suites. La proposition suivante en est une autre illustration :

Proposition 10 (Lien suites-séries)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration

Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$. Alors, par télescopage, $S_n = a_{n+1} - a_0$. Ainsi, on a les équivalences

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Leftrightarrow (a_{n+1} - a_0)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

■

Exemple 11

Illustrons ce résultat par deux exemples :

1. L'utilisation de **suites** pour démontrer la convergence de **séries** : la série de terme général $\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc la série de terme général $\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2. L'utilisation de **séries** pour étudier des **suites** (c'est le plus joli !)
Revenons sur le DM12 (sur l'équivalent de Stirling, à l'époque la numérotation était chaotique !). Notre but est de démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
On pose alors

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n},$$

et on montre que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle. Pour ce faire, on étudie la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

(refaites le calcul mais il est dans le DM12)
On doit ensuite démontrer que la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge...

Mais comment faire ?

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

1.2 Séries à termes positifs

Il est temps de trouver des moyens de démontrer la convergence de séries numériques. On commence avec des séries à termes positifs (ou positifs à partir d'un certain rang, cela ne change pas grand chose). Pourquoi aime-t-on ces séries ? Parce que...

Proposition 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **positifs** et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge.
3. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 13

Bien sûr, la propriété précédente fonctionne aussi si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

Démonstration

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît.
2. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.
3. On sait que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente, donc elle est inférieure ou égale à sa limite.

■

Ce résultat permet d'obtenir la

Proposition 14 (Théorèmes de comparaison des séries à termes positifs)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels **positifs**.

1. si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
2. si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
3. si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum v_n$ converge **si et seulement si** $\sum u_n$ converge.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Démonstration

On ne prouve que le premier point : si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$; si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$!

Supposons donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Alors on dispose de $C > 0$ et de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$,

$$u_k \leqslant C v_k.$$

Ainsi, si $n \geqslant N$

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant C \sum_{k=N}^{n} v_k \leqslant C \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

la dernière inégalité venant du fait que $\sum v_n$ converge. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{N} u_k}_{\text{indépendant de } n} + C \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

donc $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, donc elle converge. ■

Remarque 15

1. Là, on va vraiment s'amuser à appliquer le cours d'analyse asymptotique !
2. Les contraposées sont aussi intéressantes : si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge !

Exemple 16

1. On va montrer d'une manière très simple que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
   On remarque que pour tout n dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$. Comme $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge, on en déduit, par **comparaison des séries à termes positifs**, que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
2. On en déduit que pour tout $s \geqslant 2$, $\sum \frac{1}{n^s}$ converge : en effet, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{1}{n^s} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Ainsi, par **comparaison des séries à termes positifs**, $\sum \frac{1}{n^s}$ converge.
3. On conclut la preuve de l'équivalent de Stirling ! On avait
   $$v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   (le calcul n'est pas immédiat, il faut faire un dl pour s'en rendre compte)
   On en déduit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$, terme général d'une série convergente, donc, **par**

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

comparaison des séries à termes positifs (on sait qu'au voisinage de $+\infty$, v_n est du signe de $\frac{1}{12n^2}$), on en déduit que $\sum v_n$ converge. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge !

Point de méthode 17

Pour déterminer la convergence ou non d'une série, on commence par essayer de faire un **équivalent** de son terme général.
Faire un équivalent est mieux que le reste :

1. l'équivalent donne le signe de la suite à partir d'un certain rang,
2. l'équivalent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ assure que si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge **et que** si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge !

Exercice 18

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. la série de terme général $\frac{2n^2+2}{3n^6+1}$,
2. la série de terme général $\frac{2^n+3n^2}{3^{2n}-n3^n}$
3. la série de terme général $\frac{\sin(n)+2^n}{n^2.2^n+n^5}$,
4. la série de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}-\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}$.

2 Séries de Riemann et comparaison série-intégrale

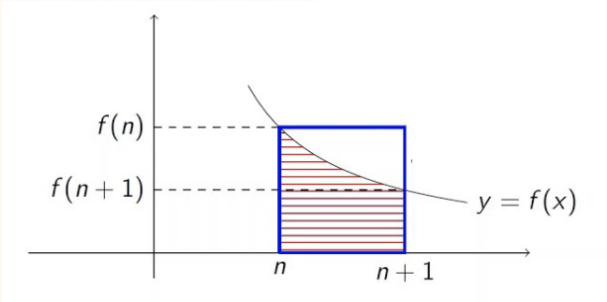
Dans cette partie, nous allons étudier beaucoup plus précisément les séries dites de Riemann et la méthode dite de la **comparaison série-intégrale**.

Point de méthode 19

Soit f une fonction positive, décroissante. Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a les inégalités

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com



Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt,$$

ou encore

$$\int_{1}^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_{0}^{n} f(t)dt.$$

Il s'agit bien d'une **méthode**, pas d'une proposition : il faudra toujours adapter à la situation (parfois, on prendra une fonction croissante, parfois, la somme partira de 2, etc. !)

De cette méthode, on en déduit la

Proposition 20 (Critère de convergence des séries de Riemann)

Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors la série de terme général $\dfrac{1}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.

Démonstration

- Déjà, si $s \leqslant 0$, alors $\dfrac{1}{n^s}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\sum \dfrac{1}{n^s}$ diverge grossièrement.
- Ensuite, si $s = 1$, alors on fait une comparaison série-intégrale : on sait que pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$

Ainsi, si $n \geqslant 2$, en sommant l'inégalité précédente pour k allant de 2 à n, on en déduit que

$$\int_{2}^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{dt}{t},$$

d'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant\leqslant \ln(n),$$

ou encore

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leqslant \sum_{\boxed{k=1}}^{n} \frac{1}{k} \leqslant\leqslant \ln(n) + 1.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Mais $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'où la divergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{k}$.

- Puis, si $s \in]0,1[$, on peut directement dire que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^s} \geqslant \dfrac{1}{k}$. Comme $\displaystyle\sum \frac{1}{k}$ diverge, $\displaystyle\sum \frac{1}{k^s}$ aussi.
- Enfin, si $s > 1$, on fait... une comparaison série-intégrale ! Soit $k \geqslant 2$. Alors

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \frac{1}{k^s} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^s}$$

Ainsi, si $n \geqslant 2$, en sommant l'inégalité précédente pour k allant de 2 à n, on en déduit que

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant \int_1^{n} \frac{dt}{t^s},$$

donc

$$\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1\right) = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{1-n^{s-1}}\right) \leqslant \frac{1}{s-1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + \frac{1}{s-1},$$

donc la suite des sommes partielles est croissante et majorée, elle converge alors !

■

Exemple 21 (Prolongements classiques)

1. **Équivalent de la série harmonique.** La comparaison série-intégrale permet de déterminer facilement des **équivalents** des sommes partielles ou des restes des séries ! Par exemple, on sait que si $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, mais peut-on en avoir un équivalent ? OUI ! On repart de la comparaison série-intégrale :

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant\leqslant \ln(n) + 1.$$

Ainsi, comme

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \ln(2) + 1 = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(2) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n),$$

et que $\ln(n) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, on en déduit, en divisant l'inégalité par $\ln(n)$ et par théorème d'encadrement, que $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2. **Déterminons alors le fait que, de plus $H_n - \ln(n)$ converge.** Ce n'est pas forcément évident ! Pour cela, on va exprimer $\ln(n)$ comme la somme partielle d'une série !

$$\begin{aligned} H_n - \ln(n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2},$$

donc, par comparaison à une série à termes positifs, la série de terme général $\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, donc $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie !
Point culture. On appelle cette limite γ, ou « constante d'Euler » . On vient donc de démontrer que

$$H_n \underset{n\to+infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. **Équivalent du reste d'une série de Riemann convergente.** Désormais, si $s > 1$, on peut vouloir chercher un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. On sait, par la comparaison série-intégrale, que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \frac{1}{k^s} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^s}.$$

Ainsi, si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ et $N \geqslant n$, on en déduit que

$$\sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^s} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^s},$$

donc

$$\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^s} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{dt}{t^s},$$

donc

$$\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(N+1)^{s-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^s} \leqslant \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{N^{s-1}}\right),$$

d'où, en prenant la limite $N \to +\infty$,

$$\frac{1}{(s-1)n^{s-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(s-1)(n-1)^{s-1}}.$$

Ceci assure que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 22 (Séries de Bertrand)

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Démontrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$...

- converge si $\alpha > 1$, ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$,
- diverge si $\alpha < 1$, ou si $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 1$.

Indications.

- si $\alpha > 1$, montrer que $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$,
- si $\alpha < 1$, montrer que $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$,
- si $\alpha = 1$, faire une comparaison série-intégrale, en remarquant que $\frac{1}{t.\ln(t)^\beta}$ est de la forme « $\frac{u'}{u^\beta}$ » .

Voilà donc un superbe outil pour mieux comprendre certaines séries !

Mais que se passe-t-il lorsque les séries ne sont pas à termes positifs ?

3 Séries à termes quelconques

La meilleure manière de démontrer la convergence d'une série à termes quelconques, c'est de se ramener à des séries à termes positifs !

3.1 Convergence absolue

Définition 23

Une série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument si la série de terme général $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple 24

On a vu (et on le reverra ici !) que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$, donc la série de terme général $\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge, mais ne converge **pas** absolument : la série de terme général $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est autre que la série harmonique, elle diverge donc !

En revanche, la série de terme général $\frac{i^n}{n^2}$ converge absolument !

L'intérêt de cette définition est la

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 25

Une série qui converge absolument converge. (l'exemple ci-dessus montre que la réciproque est fausse)

Démonstration

Cas des suites réelles. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de **réels** telle que $\sum |u_n|$ converge. On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0).$$

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -3, 2, 4, -2, -5, \dots)$, $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 2, 4, 0, 0, \dots)$ *et* $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 3, 0, 0, 2, 5, \dots)$ *: on prend la partie positive de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un côté, et la partie négative de l'autre.*
Alors, on a immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ et } |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

Comme $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites positives, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \text{ et } 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|.$$

Par **comparaison des séries à termes positifs**, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.
Donc $\sum u_n^+ - u_n^-$ converge, donc la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Cas des suites complexes. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que $\sum |u_n|$ converge. On écrit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \mathfrak{Re}(u_n) + i\mathfrak{Im}(u_n)$. Mais, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |\mathfrak{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \text{ et } 0 \leqslant |\mathfrak{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|,$$

donc les séries de termes généraux $(\mathfrak{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent absolument, donc convergent, donc la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ■

Point de méthode 26

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on essaie de faire un équivalent de $|u_n|$: s'il est simple, et s'il s'agit du terme général d'une série convergente, alors on peut dire que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument, donc converge.
Plus rapidement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Mais que se passe-t-il lorsqu'on n'a pas de convergence absolue ? On a un critère, que l'on a déjà fait intégralement dans le chapitre de suites !

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

3.2 Séries alternées

Proposition 27 (Critère des séries alternées)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, qui décroit et tend vers 0.
Alors la série de terme général $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration

On a déjà fait intégralement cette preuve ! On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

- On montre que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
  - soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0, \end{aligned}$$

    donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroit.
  - soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+3}u_{2n+3} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0, \end{aligned}$$

    donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroit.
  - Enfin, si $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite ℓ.
- Donc les suites extraites d'indices pairs et impairs de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

D'où le résultat ! ■

Remarque 28

La preuve précédente permet de mieux comprendre le reste des séries alternées : en effet, on sait qu'alors

$$S_{2n+1} \leqslant \ell \leqslant S_{2n},$$

donc $\ell - S_{2n} \leqslant 0$ donc $R_{2n} \leqslant 0$, c'est-à-dire que $\sum_{k=2n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k \leqslant 0$ et, de même, $R_{2n+1} \geqslant 0$.

Pour résumer **le signe de R_n est dicté par le premier terme de R_n**.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Mieux encore, mais nous n'en ferons vraiment pas grand chose en sup... (en revanche, en spé, cela sera incroyable) :

- comme $S_{2n+1} \leqslant \ell \leqslant S_{2n}$, en soustrayant S_{2n}, $-u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0$, donc $|R_{2n}| \leqslant u_{2n+1}$,
- comme $S_{2n+1} \leqslant \ell \leqslant S_{2n+2}$, en soustrayant S_{2n+1}, $0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$.

Ainsi, le reste est majoré, en valeur absolue, par la valeur absolue de son premier terme.

En MPSI, il faut **surtout** pouvoir faire des exemples !

Exemple 29

1. Si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, alors $\sum u_n$ converge, car $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, tendant vers 0.
2. **IMPORTANT** : ceci donne un contre exemple au théorème de comparaison des séries à termes positifs... quand on enlève l'hypothèse de positivité !
   Si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ converge. **MAIS** $\sum u_n$ diverge : en effet, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère des séries alternées et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge !

Point de méthode 30

Lorsqu'on a un terme général dont l'équivalent n'est pas de signe constant, il **faut** poursuivre le dl plus loin !

Exemple. Si $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, déterminons la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Naïvement, on pourrait vouloir dire « $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n}$ »... oui, et alors ? ? Cela ne suffit pas !

En revanche, si l'on poursuit le dl :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

alors

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + v_n, \text{ où } v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère des séries alternées, $\sum -\dfrac{1}{2n^2}$ converge par le critère des séries de Riemann et $\sum v_n$ converge par comparaison à une série de Riemann.

Exercice 31

Regarder l'exercice 2 du TD !