

DM 17
à rendre le lundi 13 mai

Un problème au choix : le problème 1 est plus élémentaire, le problème 2 plus théorique.
Durée : 2h minimum, 4h maximum conseillée (il s'agit, dans chaque cas, d'un demi-problème de concours).

**Problème 1. Matrices semblables à leur inverse, Petites Mines
MPSI 2002**

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B .

Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

Correction

C'est une question de cours.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de traces différents ne sont pas semblables.

Correction

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Alors on dispose de P inversible tel que $B = PAP^{-1}$. Donc $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}PA) = \text{Tr}(A)$. Donc si A et B sont semblables, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$. D'où la contraposée.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.

On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

(a) Montrer que $\text{Im} w \subset \ker u^i$.

Correction

Soit y dans $\text{Im}(w)$. Alors on dispose de x dans $\ker(u^{i+j})$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$.
Donc $u^i(y) = u^i(u^j(x)) = u^{i+j}(x) = 0$ car $x \in \ker(u^{i+j})$. D'où l'inclusion désirée.

(b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

Correction

On sait, d'après le théorème du rang, que

$$\dim(\ker(u^{i+j})) = \dim(\ker(w)) + \text{rg}(w).$$

Or, $\text{Im}(w) \subset \ker(u^i)$ donc $\text{rg}(w) \leq \dim(\ker(u^i))$. De plus, si $x \in \ker(w)$, alors $u^j(x) = 0$ donc $\ker(w) \subset \ker(u^j)$. Donc $\dim(\ker(w)) \leq \dim(\ker(u^j))$. Donc

$$\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j).$$

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg} u = 2$.

(a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question 3b.).

Correction

Comme $\text{rg}(u) = 2$, $\dim(\ker(u)) = 1$. Donc, puisque $u^3 = 0$, on obtient par la question précédente que

$$3 = \dim(\ker(u^3)) \leq \dim(\ker(u^2)) + \dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2)) + 1, \text{ i.e. } 2 \leq \dim(\ker(u^2))$$

$$\dim(\ker(u^2)) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(u)) = 2,$$

$$\text{donc } \dim(\ker(u^2)) = 2.$$

(b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .

Correction

On sait que $u^2 \neq 0$ car sinon on aurait $\ker(u^2) = E$, donc $\dim(\ker(u^2)) = 3$. Donc on dispose de a dans E tel que $u^2(a) \neq 0$. a n'est en particulier pas nul. On montre alors que $u^2(a), u(a), a$ est une base de E . Soient λ, μ et ν tels que

$$\lambda u^2(a) + \mu u(a) + \nu a = 0. \quad (1)$$

En composant une fois par u , et comme $u^3 = 0$, il vient

$$\mu u^2(a) + \nu u(a) = 0, \quad (2)$$

donc, en composant une nouvelle fois par u ,

$$\nu u^2(a) = 0, \quad (3)$$

donc, comme $u^2(a) \neq 0$, $\nu = 0$, donc, par (2), $\mu u^2(a) = 0$ donc $\mu = 0$, donc, par (1), $\lambda = 0$.

Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc $(u^2(a), u(a), a)$ est libre.

De cardinal $3 = \dim(E)$, cette famille est donc une base de E .

(c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

Correction

En posant $e_1 = u^2(a)$, $e_2 = u(a)$ et $e_3 = a$, on a $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$, donc la matrice de u dans cette base est donc

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$V = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg} u = 1$.

(a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

Correction

Comme $\text{rg}(u) = 1$, $u \neq 0$, donc on dispose de b dans E tel que $u(b) \neq 0$. En particulier, $b \neq 0$.

(b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .

Correction

Comme $\text{rg}(u) = 1$, $\ker(u)$ est de dimension 2. Or, si tous les vecteurs de $\ker(u)$ étaient colinéaires à $u(b)$, $\ker(u)$ serait une droite, absurde. Donc on dispose d'un vecteur c dans $\ker(u)$ qui ne soit pas colinéaire à $u(b)$, donc $(u(b), c)$ est libre. On montre ensuite que $(b, u(b), c)$ est libre. Soient λ , μ et ν tels que

$$\lambda b + \mu u(b) + \nu c = 0. \quad (4)$$

En composant par u , et comme $u(c) = 0$, et $u^2 = 0$,

$$\lambda u(b) = 0. \quad (5)$$

Donc, comme $u(b) \neq 0$, $\lambda = 0$. Donc, par (4),

$$\mu u(b) + \nu c = 0,$$

donc, comme $(u(b), c)$ est libre, $\mu = \nu = 0$.

Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc

$(b, u(b), c)$ est une famille libre de cardinal $3 = \dim(E)$, donc est une base de E .

(c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Correction

Si l'on pose $\varepsilon_1 = b$, $\varepsilon_2 = u(b)$ et $\varepsilon_3 = c$, alors

$$u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad u(\varepsilon_2) = 0, \quad u(\varepsilon_3) = 0,$$

donc

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V' = U'^2 - U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

Correction

La matrice A est semblable à une matrice triangulaire avec une diagonale non nulle. Cette matrice triangulaire est inversible, car de rang 3, donc A est elle-même inversible (car deux matrices semblables sont équivalentes donc de même rang).

2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

Correction

On remarque que $N^3 = 0$. Donc

$$(I_3 - N + N^2)(I_3 + N) = I_3 + N - N - N^2 + N^2 + N^3 = I_3 + 0 + 0 + 0 = I_3,$$

donc $I_3 + N$ est inversible d'inverse $I_3 - N + N^2$, donc $P^{-1}AP$ est inversible d'inverse $I_3 - N + N^2$, donc

$$PA^{-1}P^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = I_3 - N + N^2.$$

3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction

Si $N = 0$, alors A est semblable à I_3 donc $A = I_3$ donc $A^{-1} = I_3 = A$. Égales, A et A^{-1} sont semblables.

4. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

- (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **A.4.**, une matrice semblable à la matrice M .

Correction

Par la partie A.4, si u est l'endomorphisme canoniquement associé à N , alors $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2$ donc on dispose d'une base dans laquelle la matrice de u a pour forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de u dans la base canonique, N , est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $M = N^2 - N$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Calculer M^3 et déterminer $\text{rg}(M)$.

Correction

Si on pose $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $M'^3 = 0$. De plus, une base de $\text{Im}(M')$ est $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc M' est de rang 2, donc M aussi.

(c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

Correction

$M^3 = 0$ et $\text{rg}(M) = 2$ donc si v est l'endomorphisme canoniquement associé à M , $v^3 = 0$ et $\text{rg}(v) = 2$ donc, d'après la partie A.4, on dispose d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, comme M est la matrice de v dans la base canonique, M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme N est aussi semblable à cette matrice et que la relation de similitude est une relation d'équivalence, M et N sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction

On sait que M et N sont semblables donc on dispose de Q inversible tel que $M = QNQ^{-1}$. Donc

$$I + M = I + QNQ^{-1} = Q(I + N)Q^{-1},$$

donc

$$P^{-1}A^{-1}P = QP^{-1}APQ^{-1},$$

donc

$$A^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1},$$

donc A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction

Si $\text{rg}(N) = 1$, par le même raisonnement que précédemment, en prenant u l'endomorphisme canoniquement associé à N , et en utilisant la question A.5, N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $M = N^2 - N$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $M^2 = 0$ et

$\text{rg}(M) = 1$, donc M est aussi semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc M est semblable à N .

Le même raisonnement que précédemment permet de conclure : A et A^{-1} sont semblables.

6. Exemple : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

- (a) Montrer que $\ker(u - \text{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .

Correction

Déterminons $\ker(u - \text{id}_E)$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur de E dans la base (a, b, c) . Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(u - \text{id}_E) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - x = 0 \\ -z - y = 0 \\ y + 2z - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

Donc $\ker(u - \text{id}_E) = \text{Vect}(a, b - c)$, donc

$\ker(u - \text{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Une base de cet espace vectoriel est (e_1, e_2) avec $e_1 = a$ et $e_2 = b - c$.

- (b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.

Correction

On sait que (a, b, c) est une base de E , donc $(a, b - c, c)$ est une base de E (combinaison entre vecteurs). Or, on a vu que $u(a) = a$, $u(e_2) = e_2$ et, en calculant,

$u(c) = -b + 2c = -e_2 + c$, donc, dans la base (e_1, e_2, c) , la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction

A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc, par les questions précédentes, A est semblable à son inverse !

7. Réciproquement, toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Correction

Non ! La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est égale à son inverse, mais ne peut pas être semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car leurs traces sont différentes.

Problème 2. Représentation matricielle Ae^A , Mines MP 2014 (extraits adaptés).

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.

Elle est dite *nilpotente d'indice p* si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$.

On « rappelle » que l'on a démontré que $p \leq n$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, on appelle exponentielle de A , et on note $\exp(A)$ ou e^A , la matrice

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}. \text{ Cette somme est en fait finie car pour tout } k \geq n, A^k = 0, \text{ donc } e^A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}.$$

Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre n* associé au nombre complexe λ , la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Par convention, si $n = 1$, $J_1(\lambda) = (\lambda)$.

On pourra s'autoriser à noter, pour alléger les notations, J_n le bloc de Jordan $J_n(0)$. L'énoncé ne prendra pas cette liberté mais les élèves sont en droit de le faire.

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- 1. Préliminaire.** Démontrer que si deux matrices nilpotentes A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, alors $A + B$ est nilpotente et $e^{A+B} = e^A e^B$.

Correction

Si A et B sont nilpotentes et commutent,

$$(A + B)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} A^k B^{2n-k}.$$

Or, si $k \leq n$, $2n - k \geq n$ donc $B^{2n-k} = 0$. Si $k \geq n$, $A^k = 0$. Dans tous les cas, $A^k B^{2n-k} = 0$, donc $(A + B)^{2n} = 0$, donc $A + B$ est nilpotente.

A. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan nilpotent

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n .

- 2.** Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $(X, NX, \dots, N^{n-1}X)$ est libre.

Correction

C'est une question « de cours » (ou en tout cas d'exercice fait en TD!). On sait que $N^{n-1} \neq 0$, donc on dispose de X tel que $N^{n-1}X \neq 0$. On montre alors que $(X, NX, \dots, N^{n-1}X)$ est libre. Si $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ sont n scalaires tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i N^i X = 0 \tag{6}$$

on pose $A = \{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_k \neq 0\}$. Si $A \neq \emptyset$, on prend k_0 son minimum. En composant (6) par N^{n-k_0-1} , on obtient, comme $\lambda_0 = \dots = \lambda_{k_0-1} = 0$, $\lambda_{k_0} N^{n-1}X = 0$.

donc $\lambda_{k_0} = 0$ car $N^{n-1}X \neq 0$, absurde !

Donc $A = \emptyset$ et la famille est libre.

3. En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.

Correction

Dans la base précédente, comme $N(N^k X) = N^{k+1}X$ et est nul si $k = n-1$, on en déduit que la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N est $J_n(0)$. Ceci signifie exactement que N est semblable à $J_n(0)$.

4. Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n .

Correction

- Il est possible de calculer explicitement l'exponentielle, mais utilisons une facilité donnée par l'énoncé : comme $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent,

$$I_n = e^0 = e^{J_n(0) - J_n(0)} = e^{J_n(0)} e^{-J_n(0)},$$

donc $e^{J_n(0)}$ est inversible, d'inverse $e^{-J_n(0)}$.

- Ensuite, comme $e^{J_n(0)}$ est un polynôme en $J_n(0)$, $J_n(0)$ et $e^{J_n(0)}$ commutent. Donc

$$(J_n(0)e^{J_n(0)})^n = J_n(0)^n (e^{J_n(0)})^n = 0.$$

Donc $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente.

- Enfin, si on avait $(J_n(0)e^{J_n(0)})^n = 0$, on aurait $J_n(0)^{n-1} (e^{J_n(0)})^{n-1} = 0$, donc, comme $(e^{J_n(0)})^{n-1}$ est inversible,

$J_n(0)^{n-1} = 0$, absurde car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n .

Donc $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n .

5. Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, $PJ_n(0)P^{-1}$ est nilpotente et qu'on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$.
En déduire qu'il existe $\bar{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente, telle que $J_n(0) = \bar{N}e^{\bar{N}}$.

Correction

- Déjà, on montre par récurrence immédiate que pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$(PJ_n(0)P^{-1})^k = PJ_n(0)^k P^{-1},$$

donc $(PJ_n(0)P^{-1})^n = 0$ et $(PJ_n(0)P^{-1})^{n-1} \neq 0$, donc $PJ_n(0)P^{-1}$ est nilpotente d'indice n .

- Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} P e^{J_n(0)} P^{-1} &= P \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} J_n(0)^k \right) P^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P J_n(0)^k P^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (P J_n(0) P^{-1})^k \\ &= e^{P J_n(0) P^{-1}}. \end{aligned}$$

- Enfin, comme $J_n(0) e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n , on sait d'après les premières questions qu'elle est semblable à $J_n(0)$, i.e. il existe P inversible telle que

$$J_n(0) = P J_n(0) e^{J_n(0)} P^{-1} = P J_n(0) P^{-1} \times P e^{J_n(0)} P^{-1} = P J_n(0) P^{-1} e^{P J_n(0) P^{-1}}.$$

En posant $\bar{N} = P J_n(0) P^{-1}$, on a $\bar{N}$ nilpotente, et $J_n(0) = \bar{N} e^{\bar{N}}$, d'où le résultat !

B. Forme de Jordan et représentation $A e^A$ d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

6. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Correction

Comme N est nilpotente d'indice p , par le même raisonnement qu'en question 2., on a l'existence d'un vecteur X tel que $(X, NX, \dots, N^{p-1}X)$ est libre. On complète cette famille libre en une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N est alors de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$$

Ceci signifie donc que N et A sont semblables.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

7. Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array} \right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

Correction

- T_X est facilement inversible d'inverse $T_X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right)$.
- On fait alors le calcul

$$\begin{aligned} A' &= T_X A T_X^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B + XC \\ \hline O & C \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & -J_p(0)X + B + XC \\ \hline O & C \end{array} \right), \end{aligned}$$

donc est de la forme voulue avec $Y = -J_p(0)X + B + XC$ et $Z = C$.

8. Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes lignes de Y , à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles.

Correction

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ les lignes de X , $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ les lignes de Y et $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ les lignes de B . Alors l'expression $Y = -J_p(0)X + B + XC$ nous permet d'avoir

$$\begin{cases} Y_1 = -X_2 + B_1 + X_1 C \\ Y_2 = -X_3 + B_2 + X_2 C \\ \vdots \\ Y_{n-1} = -X_n + B_{n-1} + X_{n-1} C \\ Y_n = B_n + X_n C. \end{cases}$$

Donc, si on prend $X_1 = 0$, on peut choisir $X_2 = B_1$ pour que $Y_1 = 0$, puis $X_3 = B_2 + X_2 C$, etc, jusqu'à $X_n = B_{n-1} + X_{n-1} C$.

Ainsi on a annulé toutes les lignes de Y , sauf éventuellement la dernière !

9. Justifier que A' est nilpotente d'indice p . En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle.

On pourra étudier l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et éventuellement raisonner par l'absurde.

Correction

- A' est semblable à A donc à N , nilpotente d'indice p , donc est nilpotente d'indice p .
- Ensuite, on suppose par l'absurde que dans A' , la dernière ligne de Y n'est pas nulle. On pose f l'endomorphisme canoniquement associé à A' , $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, en particulier,

$$f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, \dots, f(e_p) = e_{p-1}.$$

Supposer que la dernière ligne de Y n'est pas nulle revient à supposer qu'il existe i dans $[[p+1, n]]$ tel que $f(e_i) = \lambda e_p + x$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

On remarque alors, comme $x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ que

$$f(x) \in \text{Vect}(e_p, \dots, e_n),$$

puis que

$$f^2(x) \in \text{Vect}(e_{p-1}, e_p, \dots, e_n),$$

puis, par récurrence immédiate,

$$f^{p-1}(x) \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_n).$$

Mais comme $f^{p-1}(e_p) = e_1$, en appliquant f^{p-1} à $f(e_i)$, on obtient

$$0 = f^p(e_i) = f^{p-1}(f(e_i)) = \lambda e_1 + x,$$

soit, comme $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ sont en somme directe, $\lambda e_1 = 0$, donc $\lambda = 0$, absurde !

Donc la dernière ligne de Y est nulle.

Remarque : l'absurde était inutile ici, mais proposée par le sujet des Mines.

10. En déduire que lorsque $1 \leq p \leq n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

Correction

On procède alors par récurrence forte sur n .

On note $\mathcal{P}_n$ la proposition : pour toute N nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, N est semblable à une

matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

L'**initialisation** est évidente, pour $n = 1$: toute matrice nilpotente est la matrice nulle !

Pour l'**hérédité**, si N est une matrice nilpotente de taille n , soit p son indice de nilpotence :

- si $p = n$, par la question 3., N est semblable à $J_n(0)$.
- si $p < n$, par les questions 7., 8. et 9., on sait que N est semblable à $\begin{pmatrix} J_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & Z \end{pmatrix}$. Mais alors, comme $N^p = 0$, par produit par blocs, $Z^p = 0$, donc Z est nilpotente. Donc, par hypothèse de récurrence, on dispose de Q dans $GL_{n-p}(\mathbb{C})$ telle que

$$Z = Q \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

En posant $P = \begin{pmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & Q \end{pmatrix}$, P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et

$$P \begin{pmatrix} J_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & Z \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} J_p(0) & & (0) \\ & J_{p_1}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

Donc N est semblable à cette dernière matrice (par transitivité).

D'où l'hérédité et le résultat par le principe de récurrence !

11. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente, telle que $N = Me^M$.

Correction

On sait que N est semblable à $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$. Mais, par la question 5., on sait que pour tout i dans $\llbracket 1, r \rrbracket$, on dispose de N_i nilpotente telle que $J_{p_i} = N_i e^{N_i}$.

Mais alors si l'on pose

$$M = \begin{pmatrix} N_1 & & (0) \\ & N_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & N_r \end{pmatrix},$$

M est nilpotente (par produit par blocs), et, toujours par calculs par blocs,

$$Me^M = \begin{pmatrix} N_1 e^{N_1} & & (0) \\ & N_2 e^{N_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & N_r e^{N_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix},$$

donc Me^M est semblable à N .