MPSI1 – Programme de colles – Semaine 26 – du 13 au 17 mai 2024

Matrices

Révisions sur le programme précédent

Séries

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Reste d'une série convergente. Lien suite-série.	 Divergence grossière. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles.
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
d) Théorème des séries alternées	
Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

Organisation de la colle

- cours sur les séries
- exercices sur les matrices et éventuellement un peu de séries.

Exemples de questions de cours

1. Théorèmes de comparaison pour les séries.
2. Lien entre suites et séries.
3. (exo classique) exemple de l'existence de $C>0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
4. Séries de Riemann.
5. (exo classique) équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ou bien par comparaison à une intégrale, ou bien en étudiant la suite $H_n - \ln(n)$.
6. Critère des séries alternées : convergence de $\sum (-1)^k u_k$
7. Critère des séries alternées : informations sur le reste.

Quelques exercices importants ou formateurs (en plus des exercices « corrigés en classe » du TD) faits dans le cours.

Faites-vous votre propre liste !

1. équivalent de Stirling.
2. séries de Bertrand.
3. équivalent de H_n
4. équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
5. nature de la stg $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$