 nlaillet.math@gmail.com

TD 23
Séries

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants ($a > 0$)

1. $\dfrac{3n+2n^2}{n^{5/3}+3n}$

2. $(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$

3. $\dfrac{\mathrm{Arctan}(n)}{n}$

4. $\dfrac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

5. $\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^n$

6. $\mathrm{Arctan}(n+a) - \mathrm{Arctan}(n)$.

Exercice 2. Déterminer la convergence des séries de termes généraux suivants

1. $\dfrac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4}$

2. $\dfrac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$

3. $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

Exercice 3. ●◐○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. Démontrer que si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2. Démontrer que si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

3. Trouver deux situations où $\ell = 1$, l'une où $\sum u_n$ converge, l'autre où $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4. Démontrer la convergence et calculer les sommes des séries de terme général...

1. $\dfrac{n}{2^n}$

2. $\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$

Exercice 5. *Règle de Raabe-Duhamel*. ●●○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Soit $1 < \beta < \alpha$. Posons $v_n = n^{-\beta}$. À l'aide d'un d.l. à l'ordre 1, démontrer qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

2. Conclure que la série de terme général (u_n) converge.

3. Trouver un contre-exemple dans le cas où $\alpha = 1$.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite de réels.

1. On suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

2. On ne suppose plus que (u_n) est à termes positifs mais que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

2 Exercices pratiques

Exercice 7. *Termes généraux divers et variés.* ◐○○ –●●○ Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas

1. $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
2. $\sum e^{-\sqrt{n}}$
3. $\sum \frac{n}{2^n+n}$
4. $\sum \frac{1}{(n^2+1)\sin(1/\sqrt{n})}$
5. $\sum \frac{n^3\ln(2n)}{3^n}$
6. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
7. $\sum \frac{n!^2}{(2n)!}$
8. $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$
9. $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
10. $\sum e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
11. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x}dx$
12. $\sum \cos\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$
13. $\sum \cos^n\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$
14. $\sum \sqrt{\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}$
15. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n}$

Exercice 8. *Termes généraux originaux.* ●●◐ Déterminer la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{nc(n)^\beta}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres en base 10 de n.
2. $\sum \frac{1}{k_n}$ où k_n est le n-ième entier qui s'écrit sans 9.

Exercice 9. ●◐○ Déterminer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n=\frac{n}{7^n}$.

Exercice 10. *Lien entre suites et séries.* ●○○ Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme

1. $w_n=(n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n^{\frac{1}{n}}$
2. $u_n=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,
3. $v_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

Exercice 11. *Séries absolument convergentes et alternées.* ●◐○ –●●○

Discuter de la convergence des séries suivantes.

1. $\sum \frac{(-1)^n\ln(n)}{n^2}$
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+\sin(n^2)}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$
4. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha\ln(n)^\beta}$
5. $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$
6. $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$
7. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
8. $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}dx$

Exercice 12. ●●○

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la nature de la série de terme général $\sin\left((2+\sqrt{3})^n \pi\right)$.

Exercice 13. *Équivalents de restes.* ●●○

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.
2. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 14. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[-1,1]$. Quelle est la nature de la série de terme général

$$n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2f'(0)?$$

3 Études plus théoriques

Exercice 15. ●○○ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Montrer que si la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors la série de terme général (u_n) converge.

Exercice 16. ●●◐ Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Étudier la série de terme général $n(u_{n-1}-u_n)$ et en déduire que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 17. ●●○

1. Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ diverge.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k$.
2. Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ converge.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant n} u_k \sim_{n\to+\infty} \sum_{k\geqslant n} v_k$.

Exercice 18. *Une étude fine de la série harmonique.* ●●◐

1. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ tend vers une constante. On appellera cette constante constante d'Euler et on la notera γ.
2. À l'aide de la série de terme général $(u_{n+1}-u_n)$ et d'une comparaison série/intégrale, montrer que $u_n - \gamma \sim \dfrac{1}{2n}$.
3. Montrer enfin que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 19. *Développement décimal d'un réel*. Soit $x \in \mathbb{R}$. Une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée développement décimal de x si $c_0 \in \mathbb{Z}$, si pour tout $k \geqslant 1$, $c_k \in [\![0,9]\!]$, et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{10^k}$.

On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.
On définit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $d_0 = a_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$.

1. Vérifier que si $c_0 \in \mathbb{Z}$, si pour tout $k \geqslant 1$, $c_k \in [\![0,9]\!]$, la série de terme général $\frac{c_k}{10^k}$ converge.
2. Démontrer que $d_n \in [\![0,9]\!]$ et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$.

Un développement décimal $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de x est dit **propre** si la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.

3. Démontrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus est un développement décimal propre de x.
4. Démontrer qu'il y a unicité du développement décimal propre d'un réel.

Exercice 20. *Rationnels et développement décimal*. ●●●
Le but de cet exercice est de montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang. Afin de simplifier les choses, supposons, sans perte de généralité, $x \in]0,1[$. Posons (d_n) le développement décimal propre de x.

1. Si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang...
   (i) Traduire l'énoncé « $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir d'un certain rang »
   (ii) Écrire en séparant et en regroupant convenablement les termes de la série du développement décimal de x le nombre x sous la forme
   $$x = a + \frac{10^p}{10^N(10^p - 1)} b,$$
   où a et b sont des rationnels et N un entier défini dans la question précédente.
2. Si x est rationnel, écrivons $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$. On définit alors les suites (q_k) et (r_k) comme le quotient et le reste de la division euclidienne de $10^k a$ par b.
   (i) Montrer qu'il existe deux entiers m et n tels que b divise $10^m a - 10^n a$.
   (ii) En déduire que $\frac{10^m a}{b}$ et $\frac{10^n a}{b}$ ont les mêmes décimales après la virgule.
   (iii) En explicitant les développements décimaux de $\frac{10^m a}{b}$ et $\frac{10^n a}{b}$, en déduire que (d_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 21. ●●● On s'intéresse à des séries « extrêmes » avec un terme général décroissant très vite ou très lentement.

1. On prend $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = e^{u_n}$. Déterminer la nature de la stg $\frac{n!}{u_n}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(n) = n \times \ln(n) \times ln(ln(n)) \times \cdots \times ln^{(k_n)}(n)$ où $ln^{(k)}$ est le logarithme itéré k fois et où k_n est le plus grand entier naturel k tel que $ln^{(k)}(n) \geqslant 1$. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$.

4 Autres exercices

Exercice 22. *Réarrangements de la série de Riemann – Oral Centrale.* ●●◐ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \text{et} \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. On définit une permutation σ de $\mathbb{N}^\star$, en alternant p entiers impairs et q entiers pairs, en respectant l'ordre des entiers de même parité :

- $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(p) = 2p - 1,$
- $\sigma(p + 1) = 2, \sigma(p + 2) = 4, \dots, \sigma(p + q) = 2q,$
- $\sigma(p + q + 1) = 2p + 1, \dots, \sigma(2p + q) = 4p - 1,$
- $\sigma(2p + q + 1) = 2q + 2, \dots$

On note alors pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$S_n^{p,q} = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
2. Exprimer, pour $N \in \mathbb{N}^\star$, $S_{(p+q)N}^{p,q}$ en fonction des termes de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. En déduire que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et donner une expression de sa somme en fonction de p et q.

On dit qu'une permutation σ de $\mathbb{N}^\star$ est bimonotone si pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\sigma^{-1}(2k) < \sigma^{-1}(2k + 2)$, et $\sigma^{-1}(2k - 1) < \sigma^{-1}(2k + 1)$. Par exemple, la permutation définie dans la première partie du sujet est bimonotone. On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$p_n(\sigma) = \text{card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(k) \text{ est pair. }\}$$

3. Soit σ une permutation bimonotone de $\mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente ssi il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $p_n(\sigma) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n$. Dans ce cas, donner une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ en fonction de α.
4. Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^\star$ telle que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = x$$
5. Soit maintenant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite quelconque de réels. A quelle condition nécessaire et suffisante le résultat de la question précédente reste-t-il vrai ?

Exercice 23. ●●● Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Arctan}(n + 1) - \text{Arctan}(n)$.

1. Montrer que pour tout $(\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\sum \varepsilon_n u_n$ converge et que sa somme est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On définit (ε_n) par
   - si $x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon_0 = 0$, sinon $\varepsilon_0 = 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, si $x \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k + u_{n+1}$, $\varepsilon_{n+1} = 0$, sinon $\varepsilon_{n+1} = 1$.

Démontrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ a pour somme x.

3. De manière générale, si (u_n) est décroissante positive, si $\sum u_k$ converge et sa somme égale S, à quelle condition sur la suite tout réel x de $[0, S]$ s'écrit-il sous la forme $x = \sum \varepsilon_n u_n$?

Stratégie Il faut absolument faire des exercices pratiques : exercices 7 (jusqu'au (j)) et 9, puis 11 (jusqu'au (e)). Faire aussi 13-1 pour faire une comparaison série-intégrale.
Ensuite, faire quelques exercices théoriques, parmi lesquels : 15, 5 et 17.

Indications

7 **D'abord** se demander si on ne peut pas simplifier le terme avec un équivalent. Puis, si on a réussi à simplifier, comparer à une série géométrique ou à une série de Riemann. Sinon, des inégalités peuvent fonctionner.

8 **1.** Si n s'écrit avec $c(n)$ chiffres en base 10, comment l'encadrer ? Trouver ainsi un équivalent de $c(n)$.

2. Compter le nombre d'entiers à k chiffres qui s'écrivent sans 9. Puis, si $n \in \mathbb{N}$, si k_n est le n-ième nombre sans 9 et $c(k_n)$ son nombre de chiffres, majoter n en fonction de $c(k_n)$.

9 La convergence est évidente. Pour la somme, commencer par calculer une somme partielle ! (cf. TD 2)

10 Se ramener à une étude de $\sum u_{n+1} - u_n$ et déterminer la convergence de (u_n).

11 Utiliser ou bien la convergence absolue, ou bien le critère des séries alternées. **Attention !** Si on est équivalent à un tg de série alternée qui converge, **cela ne signifie pas** que la série de départ converge ! Faire un dl dans ce cas.

12 **1.** Utiliser le binôme de Newton.

2. Exprimer $\sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$ à l'aide de $\sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)$ et remarquer que $|2-\sqrt{3}| < 1$.

13 Utiliser les mêmes méthodes qu'en **??** ! (comparaison série-intégrale).

14 Utiliser un développement limité donné par la formule de Taylor-Young.

15 Que vaut $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$?

16 Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n(u_{n-1} - u_n) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, en déduire que $\sum n(u_{n-1} - u_n)$ converge, puis montrer que nu_n converge vers une limite, puis montrer que cette limite est nulle.

17 Revenir à la définition de $\sim$: $u_n \sim v_n$ ssi $\exists(\varepsilon_n)$ tendant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ àpcr. Puis faire soigneusement chaque majoration.

5 **1.** Démontrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Faire un équivalent de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, qui sera négatif à partir d'un certain rang.

3. Démontrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang, et utiliser l'exercice 15.

4. Penser à une série de Riemann divergente.

18 1. Utiliser le fait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln(k)+\ln(k-1)\right)$.

2. Tout est dans la question !

3. Définir $w_n=v_n-\dfrac{1}{2n}$, et étudier $\sum w_{k+1}-w_k$, pour montrer que le reste converge et est équivalent à $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{6k^2}$.

20 L'énoncé me paraît suffisamment détaillé !

21 1. Regarder u_1, u_2 et montrer qu'on a très rapidement $u_n\geqslant n^n$.

2. Poser $f_i:[u_i,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction $t\mapsto t\ln(t)\dots ln^{(i)}(t)$. La série en question a pour terme général $\dfrac{1}{f(n)}$ où $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}[$ est la fonction dont la restriction à $[u_i,u_{i+1}]$ est f_i. Faire alors une comparaison série-intégrale.