

Séries

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence et divergence	
<p>Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.</p> <p>Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Reste d'une série convergente. Lien suite-série.</p> <p>Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.</p>	<p>La série est notée $\sum u_n$.</p> <p>En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.</p> <p>Divergence grossière.</p> <p>La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.</p>
b) Séries à termes positifs ou nuls	
<p>Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.</p>	<p>Application à l'étude de sommes partielles.</p>
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
<p>Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de \mathbb{R}^+, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.</p>	<p>Le critère de Cauchy est hors programme.</p>
d) Théorème des séries alternées	
<p>Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum (-1)^n u_n$ converge.</p>	<p>Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.</p>

Groupe symétrique et déterminants

B - Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;
- établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
<p>Forme n-linéaire alternée sur un \mathbb{K}-espace vectoriel de dimension n. Antisymétrie, effet d'une permutation.</p>	<p>La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n-linéaire alternée et si (x_1, \dots, x_n) est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.</p>

b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si e est une base, il existe une unique forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$; toute forme n -linéaire alternée est un multiple de \det_e .

Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.

Comparaison, si e et e' sont deux bases, de \det_e et $\det_{e'}$.

La famille (x_1, \dots, x_n) est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Notation \det_e . La démonstration de l'existence n'est pas exigible.

Dans \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).

c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme.

Déterminant d'une composée.

Caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée.

Déterminant d'un produit.

Caractérisation des matrices inversibles.

L'application \det induit un morphisme de $\text{GL}(E)$ (resp. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$) sur \mathbb{K}^* .

Déterminant d'une transposée.

Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.

Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

e) Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires.

Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Déterminant d'une matrice triangulaire.

Déterminant de Vandermonde.

Lien avec les polynômes de Lagrange.

NB : contrairement à ce qui est proposé dans la progression du programme, le cours a été construit ainsi

- formule du déterminant d'une matrice carrée (et, au passage, un lemme technique sur le fait qu'une forme f n -linéaire alternée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est égale à $f(I_n) \times \det$),
- calculs concrets de déterminants : opérations élémentaires et développements,
- déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme,
- Vandermonde ; comatrice (**pas encore fait !**)

Organisation de la colle

- cours sur les déterminants
- exercices sur les séries (et éventuellement quelques calculs de déterminants ; éviter les exercices théoriques)

Exemples de questions de cours

1. Formule du déterminant d'une matrice ; explicitation en dimensions 2 et 3.
2. Déterminant d'une transposée.
3. Le déterminant est une forme n -linéaire alternée.
4. Si f est une forme n -linéaire alternée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $f = f(I_n) \times \det$
5. Déterminant par blocs.
6. Déterminant d'un produit et lien entre déterminant et inversibilité.
7. Lien entre déterminant et opérations élémentaires.
8. Développement selon une ligne ou une colonne.
9. Calcul d'un déterminant tridiagonal.
10. Bonne définition du déterminant d'un endomorphisme.