

DM 19 pour le lundi 3 juin

Formules

- Formule 1 : faire le problème de CCINP (2h max)
- Formule 2 : faire le problème « maison » (ancien DS, avec des indications en moins – 3h)
- Formule 3 : tout faire

Problème 1. Extrait CCINP 2009

I. Définition et propriétés

Soit p et q deux entiers naturels non nuls, soit

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0, b_q \neq 0$.

Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\text{Res}(P, Q)$:

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & \vdots \\ & & a_p & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q + p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros.

Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\text{Res}(P, Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\text{Res}(P, Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

Soit u l'application de E vers F définie pour $(A, B) \in E$ par : $u(A, B) = PA + QB$.

1. Cas où u est bijective

- Démontrer que u est une application linéaire.
- Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

- (c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\text{Ker } u$ et en déduire que u est bijective.

2. **Matrice de u**

On note $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1, X, \dots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F .

- (a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
 (b) Démontrer que $\text{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si, P et Q sont premiers entre eux (donc $\text{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si, P et Q ont au moins une racine commune complexe).

3. **Racine multiple**

- (a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si, $\text{Res}(P, P') = 0$.
 (b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.

II. Applications

4. **Équation de Bézout**

Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.

- (a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.
 (b) On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$PA_0 + QB_0 = 1.$$

Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u puis donner un couple solution.

- (c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$PA + QB = 1.$$

On pourra commencer par remarquer que, si (A, B) est un couple solution, alors $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$.

(il n'y a pas de question 5, c'est normal ! La question 6 est plus difficile je trouve, elle peut être considérée comme facultative)

6. **Nombre algébrique**

En utilisant les polynômes

$$P(X) = X^2 - 3 \quad \text{et} \quad Q_y(X) = (y - X)^2 - 7,$$

déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.
 Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

Problème 2. Problème maison

Dans ce problème, on s'intéresse à quelques propriétés des matrices de rang 1. Dans les parties A et B, on s'intéresse particulièrement au calcul de $\det(I_n + A)$ dans le cas où A est de rang 1 (avec des arguments différents de ceux vus en cours).

Dans la partie C, complètement indépendante, on se demande si toute matrice de rang 1 peut s'écrire comme la comatrice d'une autre matrice.

A. Calcul de $\det(I_n + A)$ où A est de rang 1

Soit A une matrice carrée.

1. Démontrer que

$$A^2 = \text{Tr}(A) \cdot A$$

On va démontrer le résultat suivant :

$$\text{Si } \text{rg}(A) = 1, \text{ alors } \det(I_n + A) = 1 + \text{Tr}(A). \quad (1)$$

A-I. Cas où A est de trace nulle

2. Si $\text{Tr}(A) = 0$, démontrer que A est semblable à $E_{2,1}$, et en déduire que la formule (1) est vraie dans ce cas particulier.

A-II. Cas où $\text{Tr}(A) \neq 0$

On suppose désormais $\text{Tr}(A) \neq 0$.

3. Démontrer que $\ker(A) \oplus \ker(A - \text{Tr}(A)I_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. En déduire que A est semblable à $\text{Tr}(A)E_{n,n}$, et en déduire $\det(I_n + A)$.

B. Étude d'une réciproque

Soit désormais f une fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(A)f(B)$ et telle que pour toute matrice A de rang 1, $f(I_n + A) = 1 + \text{Tr}(A)$.

5. Vérifier que f n'est pas constante nulle. Déterminer la valeur de $f(I_n)$, puis démontrer que si A est une matrice inversible, $f(A) \neq 0$.
6. Déterminer l'image par f d'une matrice de transvection/permutation/dilatation.
7. En déduire que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors $f(A) = \det(A)$.
8. Démontrer que si $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(J_{n,n,r}) = 0$, puis que $f = \det$.

C. Matrices de rang 1 et comatrices

C-I. Rang de la comatrice

On rappelle que si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\text{Com}(M)$ sa comatrice.

9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A , la comatrice de A et le rang de la comatrice de A .

- 10.** Soit M quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner la formule reliant M et $\text{Com}(M)$. Discuter, en fonction du rang de M , du rang de la comatrice de M .

Notre but est d'établir une réciproque et de déterminer si une matrice quelconque peut être représentée comme une comatrice. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A vérifie la propriété (RC) s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = \text{Com}(B)$.

C-II. Un lemme préliminaire

- 11.** Soient A et B dans $GL_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A)\text{Com}(B)$.

Soient désormais A et B deux matrices, que l'on ne suppose plus dans $GL_n(\mathbb{K})$.

- 12.** Démontrer qu'il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, $A + xM \in GL_n(\mathbb{K})$.
On admet qu'il existe aussi N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, $B + xN \in GL_n(\mathbb{K})$.
- 13.** Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,

$$\text{Com}((A + xM)(B + xN)) = \text{Com}(A + xM)\text{Com}(B + xN),$$

puis, en s'intéressant à la convergence des coefficients des matrices ci-dessus, démontrer que $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A)\text{Com}(B)$.

C-III. Représentation par une comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 14.** Si A est inversible, déterminer $\det(\text{Com}(A))$ et $\text{Com}(\text{Com}(A))$, et vérifier que A satisfait la propriété (RC).
- 15.** Déterminer la comatrice de $J_{n,n,n-1}$. En déduire que si A est de rang 1, alors elle satisfait la propriété (RC).
- 16.** Et si A est quelconque ?