MPSI1 – Programme de colles – Semaine 29 – du 3 au 7 juin 2024

Groupe symétrique et déterminants

B - Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. L'application $\det$ induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$.
Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.
f) Comatrice	
Comatrice.	Notation $\mathrm{Com}(A)$.
Relation $A\,\mathrm{Com}(A)^\top=\mathrm{Com}(A)^\top A=\det(A)I_n$.	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Organisation de la colle. Cours et exercices sur les déterminants.
NB : contrairement à ce qui est proposé dans la progression du programme, le cours a été construit ainsi

- formule du déterminant d'une matrice carrée (et, au passage, un lemme technique sur le fait qu'une forme f n-linéaire alternée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est égale à $f(I_n) \times \det$),
- calculs concrets de déterminants,
- déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme
- Vandermonde ; comatrice

Exemples de questions de cours

1. Déterminant d'une transposée.
2. Le déterminant est une forme n-linéaire alterné.
3. Si f est une forme n-linéaire alternée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $f = f(I_n) \times \det$
4. Déterminant par blocs.
5. Déterminant d'un produit et lien entre déterminant et inversibilité.
6. Lien entre déterminant et opérations élémentaires.
7. Développement selon une ligne ou une colonne.
8. Calcul d'un déterminant tridiagonal.
9. Le déterminant de Vandermonde est non nul ssi les réels sont deux à deux distincts : preuve sans le calcul du déterminant.
10. Déterminant de Vandermonde (2 méthodes proposées : par opérations élémentaires ou via l'introduction d'un polynôme).
11. $A \,\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$

Cours d'intégration : début

12. Théorème de Heine. (rq : on a écrit une proposition précédente donnant des caractérisations séquentielles de la non-uniforme continuité)
13. Si f est une fonction continue sur un segment et $\varepsilon > 0$, il existe g en escalier telle que $\|f - g\| \leq \varepsilon$.