MPSI1 – Programme de colles – Semaine 30 – du 10 au 14 juin 2024

Intégration

Cette section a pour principal objectif de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment et d'en établir les propriétés principales. Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues n'est pas un attendu du programme.

Le corps $\mathbb{K}$ est pris égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le professeur peut soit se placer d'emblée dans le cadre des fonctions à valeurs complexes, soit traiter en premier lieu le cas réel avant de procéder à une brève extension.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	Exemple des fonctions lipschitziennes. La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert\displaystyle\int_{[a,b]} f\right\rvert \leqslant \displaystyle\int_{[a,b]} \lvert f\rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$. Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
d) Sommes de Riemann	
Pour f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.
e) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
f) Formules de Taylor globales	
Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Organisation de la colle. Cours et exercices sur l'intégration. On insistera particulièrement sur les inégalités liées aux intégrales, et on fera le lien avec les autres chapitres d'analyse (suites, continuité, dérivabilité, convexité, asymptotique,...).

Exemples de questions de cours

1. Théorème de Heine.
2. Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier.
3. Fonctions continues de signe constant et d'intégrale nulle.
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz (cas des fonctions continues).
5. Si f est continue, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.
6. Formule de Taylor avec reste intégral.
7. Inégalité de Taylor-Lagrange.
8. Formule de Taylor-Young.
9. Convergence des sommes de Riemann dans le cas Lipschitzien.
10. (révisions du chapitre 6) Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0.
11. (révisions du chapitre 6) Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Questions de cours d'espaces euclidiens

12. Exemples de produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$
13. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.
14. La norme euclidienne associée à un produit scalaire est un produit scalaire.
15. Une famille de vecteurs orthogonaux ne contenant pas le vecteur nul est libre.