DM 21
pour le lundi 17 juin

Théorème de Müntz-Szász

Le but de ce problème est d'étudier les matrices et les déterminants de Gram, ainsi qu'une conséquence de cette notion en analyse connue sous le nom de théorème de Müntz.
La partie A. est consacrée à l'étude de deux résultats importants sur le déterminant de Gram (ils sont repérés par les formules (1) et (2)). La partie B. comporte des questions largement indépendantes des autres parties (définition d'un produit scalaire, calcul d'un déterminant de Cauchy) et ne nécessite que les formules (1) et (2). Les premières questions sont des questions de cours ; les questions de la partie B-III. demandent, quant à elles, de faire le lien entre toutes les notions mises en jeu dans le problème.

Dans tout le problème, E désigne un espace préhilbertien réel. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $\langle u, v\rangle$, la norme euclidienne associée $\|u\|$.

A. Matrice de Gram

A-I. Calculs en dimension 2

Dans cette partie A-I., on suppose que E est un espace euclidien de dimension 2.

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz en valeur absolue :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|\,,$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Soient u et v deux vecteurs quelconques de E. On note $\mathrm{Gram}(u, v)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u, v) = \begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle \end{pmatrix} \text{ et } G(u, v) = \det[\,\mathrm{Gram}(u, v)\,]$$

2. Montrer que : $G(u, v) \geqslant 0$.

3. On note P un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E contenant u et v et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de P. Vérifier que : $G(u, v) = [\,\det_{\mathscr{B}}(u, v)\,]^2$.
On pourra décomposer u et v dans la base $\mathscr{B}$.

4. À quelle condition a-t-on $G(u, v) = 0$?

A-II. Généralisation à la dimension quelconque

On suppose ici que E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $(u, \ldots, u_n)$ n vecteurs de E. Pour tout i, tout j, entiers de $[\![1, n]\!]$, on note $g_{ij} = \langle u_i, u_j\rangle$.
On note $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice d'élément général g_{ij} et le déterminant de cette matrice est noté $G(u_1, \ldots, u_n) = \det[\,\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)\,]$.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

On pose, pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, $u_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{kj} e_k$. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = (u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

5. Montrer que $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n) = A^T A$. En déduire que $G(u_1, \dots, u_n)$ est un réel positif, et montrer que
$$G(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \iff (u_1,\ \dots,\ u_n) \text{ libre.} \tag{1}$$

Dans toute la suite E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1,\ \dots,\ u_r$ sont r vecteurs de E, on note, $G(u_1, \dots, u_r)$ le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ de terme général $\langle u_i, u_j\rangle$.

Soit $(e_1,\ \dots,\ e_p)$ une famille libre de p vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Pour tout x élément de E, on note x_F le projeté orthogonal de x sur F et $x^\perp$ le vecteur tel que : $x = x_F + x^\perp$.

6. Exprimer les quantités suivantes à l'aide de x_F, de $x^\perp$ et/ou de $(e_1, \dots, e_p)$:
- $\langle x, e_i\rangle$ ($i \in [\![1, p]\!]$),
- $\|x\|^2$,
- le réel $d(x,\ F)$ défini par $d(x, F) = \inf\big\{\|x - f\|\ ;\ f \in\ F\big\}$.

On ne demande pas de justification.

7. Montrer que
$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \dots, e_p)}{G(e_1, \dots, e_p)}} \tag{2}$$

B. Le théorème de Müntz-Szász

Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

B-I. Étude d'une structure euclidienne

On définit pour toutes f et g dans E, $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

8. Vérifier que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

Pour λ réel strictement positif, on note p_λ l'élément de E défini par :
$$\forall t \in\ [0, 1],\quad p_\lambda(t) = \begin{cases} t^\lambda \text{ si } t \neq 0, \\ \ 0 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

9. Calculer, pour λ et μ deux réels strictement positifs, $\langle p_\lambda|p_\mu\rangle$.

Soit $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs vérifiant :
$$\lim_{j\to+\infty} \lambda_j = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_j} \text{ est une série divergente.}$$

10. Donner un exemple de telle suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$, en justifiant.

11. Pour n entier non nul, on note $E_n = \mathrm{Vect}(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$. Vérifier que E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.

Soit k un entier fixé pour toute la suite du problème. Notre but est d'approcher $p_k : x \mapsto x^k$ par une combinaison linéaire des $(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que
$$d(p_k, E_n)^2 = \inf\left\{\int_0^1 \Big(t^k - \sum_{i=1}^n a_i t^{\lambda_i}\Big)^2 dt\ ;\ (a_1, \dots, a_n) \in\ \mathbb{R}^n\right\},$$
et exprimer cette quantité en fonction de déterminants de Gram.

B-II. Déterminant de Cauchy

Soit p un entier non nul, $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ des réels strictement positifs tels que, pour tout i, pour tout j, $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$
Le but de cette question est de calculer le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de terme général $\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.
Ce déterminant sera noté $C(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$.

13. Soit $F(X) = \dfrac{(X - a_1)\ldots(X - a_{p-1})}{(X + b_1)\ldots(X + b_p)}$. Calculer la décomposition en éléments simples de F.

14. On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 + b_{p-1}} & F(a_1) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_p + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$$

Montrer, à l'aide de (b), et en calculant D par deux méthodes différentes que :

$$F(a_p)\, C(a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1}) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(a_i + b_p)}{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(b_p - b_i)}\, C(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p).$$

15. En déduire que

$$C(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant p}(a_j - a_i) \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant p}(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p}(a_i + b_j)}.$$

B-III. Preuve du théorème

On note $\lambda_0 = k$ et, pour pour $i \in [\![0, n]\!]$, $\mu_i = \lambda_i + \dfrac{1}{2}$. Le réel positif $d(p_k, E_n)$ désigne toujours la distance de la fonction $p_k : t \mapsto t^k$ au sous-espace vectoriel de dimension finie E_n.

16. Démontrer, en exprimant $d(p_k, E_n)^2$ comme un déterminant de Cauchy, que

$$d(p_k, E_n)^2 = \frac{1}{1 + 2k} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k}\right)^2.$$

On suppose de plus que $\forall i \geqslant 1,\ k \neq \lambda_i$.

17. Montrer qu'il existe un entier non nul N tel que $\forall i \geqslant N, \quad 1 - \dfrac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k} > 0$.

18. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{i\geqslant N} \ln\left(1 - \dfrac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k}\right)$? En déduire que $d(p_k, E_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

19. Démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left\| p_k - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

20. En déduire que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left\| Q - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

On définit $\|\cdot\|_\infty$ par, pour tout f dans E, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

21. Justifier l'existence de cette borne supérieure et montrer que si $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \|f_n - f\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exhiber un contre-exemple montrant que la réciproque de la proposition ci-dessus est fausse.

On admet le théorème d'approximation de Weierstrass :

Théorème 1

Pour toute f de E, il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $\|f - P_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

22. Démontrer que pour toute f dans E, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\bigcup_{n \geqslant 1} E_n$, i.e. de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i \in \mathbb{N}}$, telle que $\|f - g_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

B-IV. Extension à la norme de la convergence uniforme

On va même démontrer un peu mieux i.e. que pour tout f dans E, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\|f - g_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit alors Q un polynôme et $\varepsilon > 0$.

23. Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\lambda_n > 1$, et démontrer qu'il existe $g \in \mathrm{Vect}(p_{\lambda_i - 1})_{i \geqslant N}$ tel que $\|Q' - g\| \leqslant \varepsilon$.

Soit h la primitive de g égale à $Q(0)$ en 0.

24. Démontrer alors que pour tout x dans $[0, 1]$, $|Q(x) - h(x)| \leqslant \|Q' - g\|$ et démontrer que pour tout f dans E, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\|f - g_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

B-V. Étude d'une réciproque

25. Démontrer la réciproque du théorème de Müntz : si $\lambda_i \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si $\lambda_i > 0$ pour tout i, si pour toute f dans E, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$, telle que $\|f - g_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la série de terme général $\dfrac{1}{\lambda_i}$ diverge.

On pourra étudier la distance de $t \mapsto t^k$ à $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i \in \mathbb{N}}$ pour un k bien choisi.