

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Produit scalaire

Produit scalaire.

Notations $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$.

Espace préhilbertien, espace euclidien.

Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Expressions $X^T Y$, $\text{tr}(A^T B)$.

Produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

b) Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, distance.

Exemples : sommes finies, intégrales.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Identité remarquable $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

Formule de polarisation associée.

c) Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.

Notation X^\perp .

L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.

Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème de Pythagore.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

d) Bases orthonormées

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète.

Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F . Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F .

En dimension finie : dimension de F^\perp , vecteur normal à un hyperplan.

Distance d'un vecteur à F .

Notation $d(x, F)$.

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F .

En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\text{Vect}(u)^\perp$.

Organisation de la colle. Cours et exercices sur les espaces préhilbertiens réels.

Exemples de questions de cours

1. Exemples de produits scalaires. (notamment sur $\mathbb{R}_n[X]$!)
 2. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
 3. Inégalité triangulaire.
 4. Théorème de Pythagore.
 5. Une famille orthogonale sans le vecteur nul est libre.
 6. Orthogonal d'une partie : propriétés diverses. (notamment, supplémentarité de u et u^\perp lorsque u est un vecteur)
 7. Supplémentarité de F et F^\perp lorsque F est de dimension finie.
 8. Existence de bases orthonormées.
 9. Théorème de la BON incomplète.
 10. Décomposition dans une base orthonormée, expression de la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée.
 11. (HP mais fait en cours : représentation d'une forme linéaire sur E euclidien comme $x \mapsto \langle u, x \rangle$).
 12. Projeté orthogonal : définition et formule.
 13. Projeté orthogonal et minimisation de distance.
 14. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
-