MPSI1 – Programme de colles – Semaine 32 – du 24 au 28 juin 2024

Procédés sommatoires discrets

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Familles sommables de nombres réels positifs	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0,+\infty]$. Borne supérieure dans $[0,+\infty]$.	
Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I.	La somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est fini, où $I=\mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge. Invariance de la somme par permutation.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.	On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.
Opérations : somme, multiplication par un réel positif.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j\in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$.	La démonstration est hors programme.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.	
f) Familles sommables de nombres complexes	
La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$.	Notation $\ell^1(I)$. Pour $I=\mathbb{N}$, lien avec les séries. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.
Somme d'une famille sommable de nombres complexes.	Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\left\lvert \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i \right\rvert \leqslant \varepsilon$. Invariance de la somme par permutation.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i\in I$, $\lvert u_i\rvert \leqslant v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.	
Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j\in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$.	La démonstration est hors programme.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini.	
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et $$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$	Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Espaces vectoriels et applications linéaires

D - Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Le but de cette partie, qu'il convient d'illustrer par de nombreuses figures, est double :

— *montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au collège et au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.*

— *modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.	L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Intersection de sous-espaces affines.	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.

Organisation de la colle. Cours et exercices sur les familles sommables et les sous-espaces affines.

Exemples de questions de cours

1. Calcul de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$.
2. Produit de Cauchy de deux séries numériques.
3. L'exponentielle est un morphisme.
4. Solutions de $f(x) = y$ avec f linéaire.
5. Intersection de sous-espaces affines.
6. Méthode de variation de la constante : description et interprétation.
7. Suites arithmético-géométriques : interprétation affine.
8. Ensemble des polynômes vérifiant $P(x_i) = y_i$.