 nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 27
Familles sommables

Exemple 1 (Un petit exemple pour motiver la suite)

Considérons $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$ et calculons, de deux manières différentes, $S + \frac{1}{2}S$. Qu'observe-t-on ?

1 Familles sommables

De même qu'au chapitre 2, nous avons vu les sommes simples, puis les sommes doubles, de même nous allons essayer de donner un sens et des règles de calcul pour les séries doubles. De même, on se demandera s'il est possible de sommer sur $\mathbb{Z}$, ou même sur de plus gros ensembles, certaines familles de termes.
Dans toute cette section, on parlera de familles indexées sur I ou sur J, il faut vraiment avoir en tête que ces ensembles seront souvent $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, etc.

1.1 Familles à termes positifs

Définition 2

On définit dans $[0, +\infty]$ les règles de calcul suivantes :

- $\forall \lambda \in [0, +\infty]$, $\lambda + \infty = +\infty$,
- $0 \times +\infty = 0$,
- $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, $\lambda \times (+\infty) = +\infty$
- On définit
$$\sup[0, +\infty] = +\infty \text{ et } \sup \emptyset = 0.$$

Démonstration

Pour le dernier point, on peut le « prouver » : le seul élément qui majore $[0, +\infty]$ est $+\infty$, c'est donc son maximum, donc sa borne supérieure. De même, tout élément de $[0, +\infty]$ majore $\emptyset$, donc 0 est bien le plus petit de ses majorants. ■

Maintenant, si I est un ensemble quelconque et $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille de réels **positifs** indexée sur I, il faut donner un sens à la « somme » $\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i$. Revenons sur deux types d'ensembles I déjà vus en classe :

- dans le chapitre 2, lorsque I est fini, nous ne nous sommes posés aucune question sur l'existence d'une telle somme.
- dans la section précédente, nous avons dit que, lorsque $\mathrm{I} = \mathbb{N}$, la somme $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$ existait si

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ admettait une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
Mais, avec nos considérations sur le travail dans $[0, +\infty]$, on pourrait très bien dire que si $\sum_{i=1}^{n} a_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En fait, la convergence d'une série se décide à partir de sommes finies. Et, quand on y pense, la somme de cette série, c'est étudier toutes les sommes **finies** possibles. La valeur de $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$ est la limite de ces sommes. Comment transformer cette limite lorsque l'on somme sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{N}^2$?

Notation 3

Si I est un ensemble, on note $\mathcal{P}_f(\mathrm{I})$ l'ensemble des parties finies de I.

Définition 4 (et prop)

Soit $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On définit

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(\mathrm{I})} \sum_{j\in J} a_j.$$

1. Si I est finie, $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_N\}$, alors $\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{k=1}^{N} a_{i_k}$.
2. Si $\mathrm{I} = \mathbb{N}$, alors $\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} a_i$.
3. Si l'un des a_i vaut $+\infty$, alors $\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = +\infty$.

Démonstration

1. On remarque que si I est finie, I est une partie finie de I et si J est une partie finie de I, comme les (a_i) sont positifs, $\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i$.
2. On remarque que comme les $[\![0, N]\!]$ sont des parties finies de I, alors pour tout N, $\sum_{i=0}^{N} a_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i$, donc la limite est toujours inférieure. Réciproquement, si J est une partie finie de I, J est une partie finie de $\mathbb{N}$, donc majorée par un certain N, donc $\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{i=0}^{N} a_i \leqslant \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} a_i$, d'où $\sup_{J\in\mathcal{P}_f(\mathrm{I})} \sum_{j\in J} a_j$ est inférieur à la limite désirée.
3. Évident

■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On a déjà, pour peu de frais, les propriétés suivantes :

Proposition 5

Soient $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(b_i)_{i\in\mathrm{I}}$ deux familles de réels positifs.

1. Pour tous λ et μ réels positifs,
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda a_i + \mu b_i = \lambda \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i + \mu \sum_{i\in\mathrm{I}} b_i.$$
2. Si $J \subset \mathrm{I}$, $\displaystyle\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i$.
3. Si pour tout i dans I, $a_i \leqslant b_i$, alors $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} b_i$.

Une des choses **FONDAMENTALES** des sommes de familles de termes positifs, c'est la **sommation par paquets.**

Proposition 6

Soit $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'ensembles indexée sur I. Soit $(E_j)_{j\in\mathbb{J}}$ une partition de I. Alors
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in E_j} a_i\right).$$

Exemple 7

1. Identifier les paquets dans les écritures
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$
2. Identifions des partitions importantes de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{N}^2$.

Proposition 8 (Conséquences du théorème de sommation par paquets)

Les conséquences de ce théorème sont au moins aussi importantes que le théorème en lui-même.

1. (invariance par permutation) Si $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille de réels positifs, alors pour toute bijection σ de I dans I,
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_{\sigma(i)}.$$
2. (Théorème de Fubini positif) Si $(c_{ij})_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J}$ est une famille de réels positifs indexée sur un produit, alors
$$\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in J} c_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in\mathrm{I}} c_{ij}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

3. (produit) Soient $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{J}}$ deux familles de réels positifs, indexées sur I et sur J. Alors
$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Exercice 9

1. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k!}$.
2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Calculer $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{e}^{-an-bm}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$ (souvenirs du chapitre 2...)
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)$.
5. On rappelle $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$. Calculer
$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{p^2q^2},\quad \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p|q}}\frac{1}{p^2q^2},\quad \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2q^2}.$$
6. Calculer $\displaystyle\sum_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{np(n+p-1)}$. *On doit faire très attention à ne manipuler que des termes positifs.*

1.2 Familles quelconques

Ici, le but est de généraliser ce que l'on a vu pour les familles à termes positifs. Nous avons déjà fait cela pour les séries, avec la notion de convergence absolue !

Définition 10

Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de complexes. On dit que $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable si $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}}|x_i|<+\infty$.

Il faut vraiment comprendre que cela correspond à la convergence absolue !

Proposition 11 (et def)

1. Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de réels indexée sur I. Alors cette famille est sommable si et

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

seulement si $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i^+$ et $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i^-$ sont finies. On note alors

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i^+ - \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i^-.$$

2. Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de complexes indexée sur I. Alors cette famille est sommable si et seulement si $(\mathfrak{Re}(x_i))_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mathfrak{Im}(x_i))_{i\in\mathrm{I}}$ sont sommables. On note alors

$$\sum_{k\in\mathrm{I}} x_k = \sum_{k\in\mathrm{I}} \mathfrak{Re}(x_k) + i\sum_{k\in\mathrm{I}} \mathfrak{Im}(x_k).$$

On déduit de cette notion de sommabilité plusieurs propositions (certaines vraiment importantes, d'autres, plus accessoires).

Proposition 12

Soient $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j\in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda\in\mathbb{C}$.

1. Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable : $\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I}|x_i|$.
2. Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables, la famille $(x_i+\lambda y_i)_{i\in I}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in I}(\lambda x_i+y_i) = \lambda\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.
3. Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables et si $x_i\leqslant y_i$ pour tout $i\in I$: $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.
4. (Théorème de sommation par paquets) Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k\in K}$ de I, la famille $\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)_{k\in K}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i$.
5. (invariance par permutation) Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute bijection φ de J sur I, la famille $\left(x_{\varphi(j)}\right)_{j\in J}$ l'est aussi et : $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}$.
6. (théorème de Fubini) Si $(u_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, les familles $\left(\sum_{j\in J} u_{ij}\right)_{i\in I}$ et $\left(\sum_{i\in I} u_{ij}\right)_{j\in J}$ le sont aussi et :
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{ij}.$$
7. Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont sommables, la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ l'est aussi et :
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

8. (théorème d'approximation par des familles finies) Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J \in \mathscr{P}_f(I), \forall K \in \mathscr{P}(\mathrm{I}),\ J \subset K \Rightarrow \quad \left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j\right| < \varepsilon.$$

On ne va pas faire ces preuves, seulement en donner des idées : on repasse toujours par les parties réelle/imaginaire et donc par les parties positive/négative. Autre idée : on démontre d'abord le théorème d'approximation par des sommes finies, et on l'utilise pour démontrer les propriétés !

Exemple 13

1. Sommabilité de la famille $(z^{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$.

Proposition 14 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries absolument convergentes. Définissons, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Alors $\sum c_n$ converge et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right).$$

Démonstration

Par convergence absolue des séries de termes généraux (a_n) et (b_n), on peut dire que la famille $(a_m b_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommables. Ainsi, si l'on note

$$E_n = \{(k, n-k),\ k \in [\![0, n]\!]\},$$

on a $\mathbb{N}^2 = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, donc, par théorème de sommation par paquets,

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{(k,\ell)\in E_n} a_k b_\ell.$$

Mais

$$\sum_{(k,\ell)\in E_n} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = c_n,$$

d'où le résultat désiré. ■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exemple 15

Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Proposition 16

L'exponentielle complexe est un morphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Démonstration

Soient z et z' dans $\mathbb{C}^2$. Alors

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(z')^\ell}{\ell!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+z')^n = e^{z+z'}. \end{aligned}$$

■