N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 29
Sous-espaces affines

1 Notion de sous-espace affine

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$-ev.

- pour tous A et B dans E, le on sait que $B - A$ est dans E. On note alors $\overrightarrow{AB} = B - A$.
- dans ce chapitre on différenciera, arbitrairement, les points, éléments de E, et les vecteurs, différences de deux éléments de E, notés avec des flèches.

On peut trouver cela perturbant, mais ce ne sont que des **notations**, pour distinguer points et vecteurs (même si ce sont, en fait, les mêmes objets !)

Proposition 1 (Relation de Chasles)

Pour tous A, B, C dans E^3,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}$$

Proposition 2

Soit $A \in E$, $\vec{u} \in E$.
$A + \vec{u}$ est l'unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Définition 3

Avec les notations précédentes, on dit que B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Définition 4

Soit $\mathcal{F} \subset E$. On dit que F est un sous-espace affine (s.e.a.) de E s'il existe A un point de E, F un sous-espace vectoriel de E, tels que

$$\mathcal{F} = A + F = \{A + \vec{u},\ \ \vec{u} \in F\}.$$

On dit alors que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine **dirigé par** F (ou que F est une **direction** de E) et passant par A.

Proposition 5

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E.

1. Il y a unicité de la direction de $\mathcal{F}$. On la note parfois $\vec{\mathcal{F}}$.
2. Si A appartient à $\mathcal{F}$, alors pour tout B dans E, B appartient à $\mathcal{F}$ ssi $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{F}}$.
3. Si A appartient à $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} = A + \vec{\mathcal{F}}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Démonstration.

1. Supposons que $\mathcal{F} = A + F = B + G$ avec $(A, B) \in \mathcal{F}^2$ et F, G deux sev de E.
   Soit $\vec{u}$ dans F. Alors $A + \vec{u} \in \mathcal{F} = B + G$, donc on dispose de $\vec{v}$ dans G tel que $A + \vec{u} = B + \vec{v}$.
   Alors $\vec{u} = B - A + \vec{v}$.
   Or, $A \in \mathcal{F} = B + G$, donc $A - B \in G$, donc $B - A$ aussi !
   Donc $\vec{u} = B - A + \vec{v} \in G$.
   Donc $F \subset G$.
   De même, on montrer que $G \subset F$, d'où le résultat !
2. Supposons que $\mathcal{F} = A_0 + F$ (avec A_0 un certain point et $F = \vec{\mathcal{F}}$). Alors pour tout B dans E,
   - si $B \in \mathcal{F}$, alors $B - A_0 \in F$, donc $\overrightarrow{A_0B} \in F$. Mais $A \in \mathcal{F}$ donc $\overrightarrow{AA_0} \in F$. Donc $\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0B} \in F$, donc $\overrightarrow{AB} \in F$,
   - réciproquement, si $\overrightarrow{AB} \in F$, alors $\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0B} \in F$, donc, comme $\overrightarrow{AA_0} \in F$, $\overrightarrow{A_0B} \in F$, donc $B \in \mathcal{F}$.
3. Ainsi, par le point précédent,
   $$\mathcal{F} = \{B \in E,\ \overrightarrow{AB} \in \vec{F}\} = \{B \in E,\ B - A \in \vec{F}\} = A + \{\vec{u},\ \vec{u} \in F\} = A + \vec{\mathcal{F}}.$$

□

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{F}$ un s.e.a. de E, F la direction de $\mathcal{F}$.

1. Si F est une droite/un plan/un hyperplan, on dit que $\mathcal{F}$ est une droite affine/un plan affine/ un hyperplan affine.
2. Si F est de dimension finie, on définit la **dimension** de $\mathcal{F}$ comme étant la dimension de F.

Exemple 7

C'est le plus important du chapitre ! Il faut se souvenir où nous avons vu des sous-espaces affines.

1. Déjà, tout s.e.v. est un s.e.a. passant par 0 (mais la réciproque n'est pas vraie !).
2. Une droite de $\mathbb{R}^2$ (quelconque) $ax + by = c$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ (de direction la droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$).
3. Si (S) est le système linéaire non homogène $AX = b$, on sait que l'ensemble des solutions du système est
   $$\{X_0 + X,\ X \in \mathcal{S}_h\},$$
   où X_0 est une solution particulière du système, et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions du système homogène : $\mathcal{S}_h$ est un sev (c'est $\ker(A)$), donc l'ensemble des solutions de (S) est un sea.
4. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle non homogène a une structure de sous-espace affine !

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

5. Soit
$$\mathcal{G} = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f = 1 \right\}.$$
Alors $\mathcal{G}$ est un s.e.a. de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$:

- $1 \in \mathcal{G}$,
- $\mathcal{G}$ est dirigé par
$$G = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

6. Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ $n+1$ réels deux à deux distincts, $(y_0, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrons que
$$\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = y_i\}$$
est un s.e.a. de $\mathbb{R}[X]$.

- Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_0, \ldots, x_n)$ et aux valeurs $(y_0, \ldots, y_n)$ est dans $\mathcal{L}$.
- Soit ensuite $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors on a les équivalences :
$$\begin{aligned} P \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = y_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = P_0(x_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ (P - P_0)(x_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow P - P_0 \in A.\mathbb{R}[X] = \{AQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}, \end{aligned}$$
où $A = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$. $A.\mathbb{R}[X]$ est clairement un sous-espace vectoriel et $\mathcal{L} = P_0 + A.\mathbb{R}[X]$. D'où la structure de sous-espace affine !

En fait, beaucoup de ces exemples viennent de la propriété suivante, que l'on a déjà montrée et que l'on rappelle :

Proposition 8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $y \in F$. Soit
$$\mathcal{A} = \{x \in E,\ f(x) = y\}$$

- si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, $\mathcal{A} = \emptyset$,
- sinon, on dispose de $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = y$, et alors $\mathcal{A}$ est le sous-espace affine de E passant par x_0 et dirigé par $\ker(f)$:
$$\mathcal{A} = x_0 + \ker(f).$$

Un cas particulier est intéressant en termes de vocabulaire est celui d'un hyperplan.

Définition 9

Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors pour tout λ dans $\mathbb{K}$, l'ensemble

$$\mathcal{S}_\lambda = \{x \in E,\ \varphi(x) = \lambda\}$$

est un hyperplan affine dirigé par $\ker(\varphi)$, appelé surface de niveau de φ à la valeur λ.
Si E est de dimension 2, on parle parfois de ligne de niveau.

Remarque 10

Comme une forme linéaire non nulle est surjective (dans $\mathbb{K}$),

$$E = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} \mathcal{S}_\lambda.$$

L'espace est partitionné selon ses surfaces de niveau.

Définition 11

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, de dimension finie n, de direction F.
Un **repère affine** de $\mathcal{F}$ est un $(n+1)$-uplet $(A_0, \ldots, A_n)$ dans $\mathcal{F}^{n+1}$ tel que $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ soit une base de F. Ainsi,

$$\mathcal{F} = A_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}).$$

Tout élément de $\mathcal{F}$, x, possède donc des **coordonnées affines** $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, telles que

$$x = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Exemple 12

Ainsi, on sait depuis le lycée que, dans $\mathbb{R}^3$, pour décrire un plan affine (s.e.a. de dimension 2), il faut 3 points.

Proposition 13 (Intersection de sous-espaces affines)

1. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G.
   - ou bien $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$,
   - ou bien $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un s.e.a. dirigé par $F \cap G$.
2. Si $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p)$ sont p s.e.a. de directions respectives $(F_1, \ldots, F_p)$, alors
   - ou bien $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \mathcal{F}_i = \emptyset$,

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- ou bien $\bigcap_{i=1}^{p} \mathcal{F}_i$ est un s.e.a. de direction $\bigcap_{i=1}^{p} F_i$.

Démonstration. **1.** si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
Soit $B \in E$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} &\Leftrightarrow B \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{G} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F \text{ et } \overrightarrow{AB} \in G \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F \cap G, \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sea de direction $F \cap G$.

□

2 Hyperplans affines d'un espace vectoriel euclidien

Dans cette section, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel euclidien, $\|\cdot\|$ est la norme associée.

Définition 14

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E. Un **vecteur normal** à $\mathcal{H}$ est un vecteur normal à $\overrightarrow{\mathcal{H}}$.

Proposition 15

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Alors si $A \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ est l'ensemble

$$\{M \in E,\ \left\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \right\rangle = 0.$$

Démonstration. C'est simplement dire que pour tout M dans E,

$$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \right\rangle = 0.$$

□

Exercice 1. Soit n un vecteur de E, $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer

$$\{x \in E,\ \langle x, n \rangle = \lambda\}.$$

Proposition 16

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, de direction H, $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$, $A \in \mathcal{H}$. Soit $M \in E$. La quantité

$$d(M, \mathcal{H}) = \inf \left\{ \left\| \overrightarrow{MB} \right\|,\ B \in \mathcal{H} \right\}$$

est atteinte et vaut $\left| \left\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \right\rangle \right|$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Démonstration. On écrit simplement que

$$\begin{aligned}\inf\left\{\left\|\overrightarrow{MB}\right\|,\ B\in\mathcal{H}\right\} &= \inf\{\|M-B\|,\ B\in\mathcal{H}\}\\ &= \inf\{\|M-A-h\|,\ h\in H\}\\ &= d(\overrightarrow{AM},H).\end{aligned}$$

Or, cette distance est atteinte en le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AM}$ sur H, i.e. en $\overrightarrow{AM}-\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\vec{n}$, d'où la distance égale

$$\left\|\overrightarrow{AM}-\left(\overrightarrow{AM}-\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\vec{n}\right)\right\| = \left\|\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\vec{n}\right\| = \left|\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{n}\right\rangle\right|.$$

□

Exercice 17

Soit $\mathcal{D}: 2x-y+1=0$, et $M=(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer la distance de M à D.