N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

TD 28
Familles sommables

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ a-t-on $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$?

Exercice 2. *Un exemple de famille non sommable*. On pose $a_{n,p} = \dfrac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

1. Expliquer simplement pourquoi la suite double $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

2 Autres exercices

Exercice 3. ●○○ Étudier la sommabilité des familles suivantes (on ne demande pas de calcul de la somme !)

$$\left(\frac{1}{1+mn}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}, \quad \left(\frac{1}{1+m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}, \quad \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

Exercice 4. ●○○ Discuter de la sommabilité des familles suivantes, et calculer leur somme

$$\left(\frac{2^{k-n}}{k(k+1)}\right)_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}, \quad \left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}, \quad \left(\frac{a^p b^q}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}, \quad \left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}, \quad \left(\binom{p+q}{p} z^{p+q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

Exercice 5. ●◐○ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1 - z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}$

Exercice 6. ●●○ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 7. *Sommation par paquets et partie entière*. ●●○

1. Montrer que $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{2^n}$.
2. Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}$.

Exercice 8. *Critère de condensation de Cauchy*. ●●○

1. Soit (a_n) une suite réelle positive décroissante. On pose $S = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $T = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} 2^k a_{2^k}$. Montrer que $S \leqslant T \leqslant 2S$.
2. Retrouver les CNS de convergence des séries de Riemann et de Bertrand.

Exercice 9. *Calculs autour de la fonction ζ.* ●●◐

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k}.$$

2. (a) Démontrer que pour tout x dans $]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

   (b) Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Rappeler pourquoi il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

   (c) Calculer, en fonction de γ, $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\zeta(p) - 1}{p}$ et $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p \frac{\zeta(p)}{p}$.

Exercice 10. *Réarrangements de la série de Riemann – Oral Centrale.* ●●◐ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. On définit une permutation σ de $\mathbb{N}^\star$, en alternant p entiers impairs et q entiers pairs, en respectant l'ordre des entiers de même parité :

- $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(p) = 2p - 1$,
- $\sigma(p+1) = 2, \sigma(p+2) = 4, \dots, \sigma(p+q) = 2q$,
- $\sigma(p+q+1) = 2p+1, \dots, \sigma(2p+q) = 4p - 1$,
- $\sigma(2p+q+1) = 2q+2, \dots$

On note alors pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n^{p,q} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
2. Exprimer, pour $N \in \mathbb{N}^\star$, $S_{(p+q)N}^{p,q}$ en fonction des termes de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. En déduire que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et donner une expression de sa somme en fonction de p et q.

On dit qu'une permutation σ de $\mathbb{N}^\star$ est bimonotone si pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\sigma^{-1}(2k) < \sigma^{-1}(2k+2)$, et $\sigma^{-1}(2k-1) < \sigma^{-1}(2k+1)$. Par exemple, la permutation définie dans la première partie du sujet est bimonotone. On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$p_n(\sigma) = \mathrm{card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(k) \text{ est pair. }\}$$

3. Soit σ une permutation bimonotone de $\mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente ssi il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $p_n(\sigma) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n$. Dans ce cas, donner une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ en fonction de α.
4. Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^\star$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = x$$

5. Soit maintenant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite quelconque de réels. A quelle condition nécessaire et suffisante le résultat de la question précédente reste-t-il vrai ?