DM 21
pour le lundi 17 juin

Théorème de Müntz-Szász

Le but de ce problème est d'étudier les matrices et les déterminants de Gram, ainsi qu'une conséquence de cette notion en analyse connue sous le nom de théorème de Müntz.
La partie A. est consacrée à l'étude de deux résultats importants sur le déterminant de Gram (ils sont repérés par les formules (1) et (2)). La partie B. comporte des questions largement indépendantes des autres parties (définition d'un produit scalaire, calcul d'un déterminant de Cauchy) et ne nécessite que les formules (1) et (2). Les premières questions sont des questions de cours ; les questions de la partie B-III. demandent, quant à elles, de faire le lien entre toutes les notions mises en jeu dans le problème.

Dans tout le problème, E désigne un espace préhilbertien réel. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $\langle u, v\rangle$, la norme euclidienne associée $\|u\|$.

A. Matrice de Gram

A-I. Calculs en dimension 2

Dans cette partie A-I., on suppose que E est un espace euclidien de dimension 2.

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz en valeur absolue :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|\,,$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Correction

Posons $f : t \mapsto \|u + tv\|^2$. Alors f est toujours positive et

$$f(t) = \langle u + tv, u + tv\rangle = \|u\|^2 + 2t\,\langle u, v\rangle + t^2\,\|v\|^2\,,$$

donc f est un polynôme de degré 2 de signe constant, donc son discriminant est négatif ou nul. Donc $4\,\langle u, v\rangle^2 - 4\,\|u\|^2\,\|v\|^2 \leqslant 0$, i.e. $\langle u, v\rangle^2 \leqslant \|u\|\,\|v\|$, i.e. $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$.
Cas d'égalité. S'il y a égalité, alors $\Delta = 0$, donc f admet une racine, donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\|u + t_0 v\|^2 = 0$, i.e. $u = -t_0 v$, i.e. u et v sont colinéaires. Réciproquement, si u et v sont colinéaires, disons $u = \lambda v$, alors $|\langle u, v\rangle| = \langle \lambda v, v\rangle = |\lambda|\,\|v\|^2$ et $\|u\|\,\|v\| = \|\lambda v\|\,\|v\| = |\lambda|\,\|v\|^2$.

Soient u et v deux vecteurs quelconques de E. On note $\mathrm{Gram}(u, v)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u, v) = \begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle \end{pmatrix} \text{ et } G(u, v) = \det[\,\mathrm{Gram}(u, v)\,]$$

2. Montrer que : $G(u, v) \geqslant 0$.

Correction

On calcule $G(u,v) = \langle u,u\rangle \langle v,v\rangle - \langle v,u\rangle \langle u,v\rangle = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 \geqslant 0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. On note P un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E contenant u et v et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de P. Vérifier que : $G(u,v) = [\det_{\mathscr{B}}(u,v)]^2$.
On pourra décomposer u et v dans la base $\mathscr{B}$.

Correction

On pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(u,v) = \begin{vmatrix} \langle u,e_1\rangle & \langle v,e_1\rangle \\ \langle u,e_2\rangle & \langle v,e_2\rangle \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1$, en notant $u_i = \langle u, e_i\rangle$ et $v_i = \langle v, e_i\rangle$. Alors

$$\det_{\mathscr{B}}(u,v)^2 = u_1^2v_2^2 - 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_1^2,$$

et

$$\begin{aligned} G(u,v) &= \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 \\ &= (u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2) - (u_1v_1+u_2v_2)^2 \\ &= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 - u_1^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - u_2^2v_2^2 \\ &= u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - u_1^2v_1^2, \end{aligned}$$

donc $\boxed{G(u,v) = \det_{\mathscr{B}}(u,v)^2}$, d'où le résultat !

4. À quelle condition a-t-on $G(u,v) = 0$?

Correction

Il s'agit du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, réalisé lorsque u et v sont colinéaires.

A-II. Généralisation à la dimension quelconque

On suppose ici que E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $(u, \ldots, u_n)$ n vecteurs de E. Pour tout i, tout j, entiers de $[\![1, n]\!]$, on note $g_{ij} = \langle u_i, u_j\rangle$.
On note $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice d'élément général g_{ij} et le déterminant de cette matrice est noté $G(u_1, \ldots, u_n) = \det[\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)]$.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
On pose, pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, $u_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{kj}e_k$. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = (u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

5. Montrer que $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n) = A^TA$. En déduire que $G(u_1, \ldots, u_n)$ est un réel positif, et montrer que

$$G(u_1, \ldots, u_n) \neq 0 \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ libre.} \qquad (1)$$

Correction

On pose $A^T = (v_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, i.e. pour tous i et j, $v_{ij} = u_{ji}$, et $A^TA = (w_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors pour tous i et j,

$$\boxed{w_{ij} = \sum_{k=1}^{n} v_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} u_{ki}u_{kj} = \langle u_i, u_j\rangle = g_{ij},}$$

ou g_{ij} est le coefficient (i, j) de $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n)$. Le résultat est donc démontré.

On en déduit que

$$G(u_1, \dots, u_n) = \det(A^TA) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2 \geqslant 0,$$

donc $G(u_1, \dots, u_n)$ est positif. Ensuite, $G(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ si, et seulement si $\det(A) \neq 0$, i.e. si et seulement si A est inversible. Comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$, A est inversible si, et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base, i.e., comme on a n vecteurs en dimension n, si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Dans toute la suite E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1, \dots, u_r$ sont r vecteurs de E, on note, $G(u_1, \dots, u_r)$ le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ de terme général $\langle u_i, u_j\rangle$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Pour tout x élément de E, on note x_F le projeté orthogonal de x sur F et $x^\perp$ le vecteur tel que : $x = x_F + x^\perp$.

6. Exprimer les quantités suivantes à l'aide de x_F, de $x^\perp$ et/ou de $(e_1, \dots, e_p)$:

- $\langle x, e_i\rangle$ ($i \in [\![1, p]\!]$),
- $\|x\|^2$,
- le réel $d(x, F)$ défini par $d(x, F) = \inf\left\{\|x - f\| \ ;\ f \in F\right\}$.

On ne demande pas de justification.

Correction

Déjà, $\langle x, e_i\rangle = \langle x_F, e_i\rangle$. Ensuite, par le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \left\|x^\perp\right\|^2$. Enfin, la distance de x à F est atteinte pour $f = x_F$, projeté orthogonal sur f. Donc $d(x, F) = \|x - x_F\| = \left\|x^\perp\right\|$.

7. Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \dots, e_p)}{G(e_1, \dots, e_p)}} \tag{2}$$

Correction

Écrivons

$$G(x,e_1,\dots,e_p)=\begin{vmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,e_1\rangle & \cdots & \langle x,e_p\rangle\\ \langle e_1,x\rangle & \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_p\rangle\\ \vdots & & & \\ \langle e_p,x\rangle & \langle e_p,e_1\rangle & \cdots & \langle e_p,e_p\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\left\|x^\perp\right\|^2+\|x_F\|^2 & \langle x_F,e_1\rangle & \cdots & \langle x_F,e_p\rangle\\ \langle e_1,x_F\rangle & \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_p\rangle\\ \vdots & & & \\ \langle e_p,x_F\rangle & \langle e_p,e_1\rangle & \cdots & \langle e_p,e_p\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\left\|x^\perp\right\|^2 & \langle x_F,e_1\rangle & \cdots & \langle x_F,e_p\rangle\\ 0 & \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_p\rangle\\ \vdots & & & \\ 0 & \langle e_p,e_1\rangle & \cdots & \langle e_p,e_p\rangle\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\|x_F\|^2 & \langle x_F,e_1\rangle & \cdots & \langle x_F,e_p\rangle\\ \langle e_1,x_F\rangle & \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_p\rangle\\ \vdots & & & \\ \langle e_p,x_F\rangle & \langle e_p,e_1\rangle & \cdots & \langle e_p,e_p\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\left\|x^\perp\right\|^2\begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_p\rangle\\ \vdots & & \\ \langle e_p,e_1\rangle & \cdots & \langle e_p,e_p\rangle\end{vmatrix}+G(x_F,e_1,\dots,e_p)$$

Or, $x_F\in\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, donc $(x_F,e_1,\dots,e_p)$ est liée, donc $G(x_F,e_1,\dots,e_p)=0$. Donc

$$G(x,e_1,\dots,e_p)=\left\|x^\perp\right\|^2\begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_p\rangle\\ \vdots & & \\ \langle e_p,e_1\rangle & \cdots & \langle e_p,e_p\rangle\end{vmatrix}=\left\|x^\perp\right\|^2G(e_1,\dots,e_p),$$

or $\left\|x^\perp\right\|^2=d(x,F)$, donc $\boxed{G(x,e_1,\dots,e_p)=d(x,F)^2G(e_1,\dots,e_p)}$, d'où le résultat demandé (car les déterminants de Gram sont positifs).

B. Le théorème de Müntz-Szász

Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

B-I. Étude d'une structure euclidienne

On définit pour toutes f et g dans E, $\langle f|g\rangle=\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

8. Vérifier que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

Correction

Déjà, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Ensuite, on montre que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est :

- **symétrique :** si f et g sont dans E, $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt = \langle g|f\rangle$ donc la forme est symétrique.
- **bilinéaire :** par symétrie, il suffit de vérifier la linéarité par rapport à la première variable. Soient f_1, f_2 et g dans E, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda f_1 + \mu f_2|g\rangle &= \int_0^1 (\lambda f_1(t) + \mu f_2(t))g(t)dt \\ &= \int_0^1 \lambda f_1(t)g(t) + \mu f_2(t)g(t)dt \\ &= \lambda \int_0^1 f_1(t)g(t)dt + \mu \int_0^1 f_2(t)g(t)dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda \langle f_1|g\rangle + \mu \langle f_2|g\rangle,\end{aligned}$$

d'où la linéarité par rapport à la première variable, et la bilinéarité par symétrie.
- **positive et définie :** soit f dans E. Alors

$$\langle f|f\rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geqslant 0,$$

par positivité de l'intégrale.
Cas d'égalité. Si $\langle f|f\rangle = 0$, alors, comme f est continue sur $[0,1]$, f est nulle sur $[0,1]$ donc f est la fonction nulle. Donc la forme est définie.

$\boxed{\langle\cdot|\cdot\rangle \text{ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire sur } E.}$

Pour λ réel strictement positif, on note p_λ l'élément de E défini par :

$$\forall t \in [0,1], \quad p_\lambda(t) = \begin{cases} t^\lambda \text{ si } t \neq 0, \\ 0 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

9. Calculer, pour λ et μ deux réels strictement positifs, $\langle p_\lambda|p_\mu\rangle$.

Correction

On calcule (on a $\lambda + \mu + 1$ strictement positif).

$$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle = \int_0^1 t^\lambda t^\mu dt = \left[\frac{1}{\lambda+\mu+1} t^{\lambda+\mu+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\lambda+\mu+1}.$$

Soit $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs vérifiant :

$$\lim_{j\to+\infty} \lambda_j = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_j} \text{ est une série divergente.}$$

10. Donner un exemple de telle suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$, en justifiant.

Correction

Si on prend $\lambda_j = j+1$, alors $\sum \frac{1}{\lambda_j} = \sum \frac{1}{j+1}$ diverge (série de Riemann) et $\lambda_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

11. Pour n entier non nul, on note $E_n = \mathrm{Vect}(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$. Vérifier que E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.

Correction

E_n est clairement un sous-espace vectoriel de E. Montrons que E est de dimension n. Pour ce faire, on montre que la famille des $(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$ est libre. Soient $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$a_1 p_{\lambda_1} + \cdots + a_n p_{\lambda_n} = 0 (\text{fonction nulle}).$$

Supposons que les (a_i) ne soient pas tous nuls. Soit k_0 le plus grand entier tel que $a_{k_0} \neq 0$. Alors

$$a_1 p_{\lambda_1}(t) + \cdots + a_n p_{\lambda_n}(t) \sim_{t\to+\infty} a_{k_0} t^{\lambda_{k_0}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty,$$

absurde car $a_1 p_{\lambda_1} + \cdots + a_n p_{\lambda_n}$ est la fonction nulle. Donc $a_1 = \cdots = a_p = 0$, i.e. la famille $(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$ est libre. Donc $\dim(E_n) = n$.

Soit k un entier fixé pour toute la suite du problème. Notre but est d'approcher $p_k : x \mapsto x^k$ par une combinaison linéaire des $(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$d(p_k, E_n)^2 = \inf \left\{ \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=1}^n a_i t^{\lambda_i} \right)^2 dt \; ; \; (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

et exprimer cette quantité en fonction de déterminants de Gram.

Correction

On peut interpréter la quantité de droite comme

$$\inf\{\|p_k - f\|, \; f \in E_n\}^2 = d(p_k, E_n)^2.$$

Cette distance est égale à

$$d(p_k, E_n)^2 = \frac{G(p_k, p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})}{G(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})}.$$

B-II. Déterminant de Cauchy

Soit p un entier non nul, $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ des réels strictement positifs tels que, pour tout i, pour tout j, $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$

Le but de cette question est de calculer le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ de terme général $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.

Ce déterminant sera noté $C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$.

13. Soit $F(X) = \dfrac{(X-a_1)\dots(X-a_{p-1})}{(X+b_1)\dots(X+b_p)}$. Calculer la décomposition en éléments simples de F.

Correction

On remarque que $\deg(F) = -1$ donc F n'a pas de partie entière. Ensuite, F n'a que des pôles simples, donc sa décomposition en éléments simples est de la forme

$$F(X) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{X+b_k}.$$

Pour déterminer β_k, on multiplie F par $X+b_k$ et on évalue en $-b_k$. On obtient

$$\beta_k = \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(-b_k-a_i)}{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ i\neq k}}(b_i-b_k)} = \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(b_k+a_i)}{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ i\neq k}}(b_k-b_i)}$$

(on a enlevé tous les signes $-$ car il y a le même nombre de termes en haut et en bas)

14. On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & F(a_1) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \dots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$$

Montrer, à l'aide de (b), et en calculant D par deux méthodes différentes que :

$$F(a_p)\, C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}\, C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p).$$

Correction

Si on évalue F en a_i, on a 0 sauf pour $i = p$. Le déterminant désiré a donc sa dernière colonne nulle, sauf le dernier coefficient. Donc en développant selon la dernière colonne, on obtient

$$D = F(a_p)\, C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}).$$

Ensuite, on remarque que

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{a_1+b_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \dots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{a_p+b_k} \end{vmatrix}$$

On effectue alors les opérations $C_p \leftarrow C_p - \beta_i C_i$ pour tout i dans $[\![1, p-1]\!]$. On obtient alors

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{p-1}} & \dfrac{\beta_p}{a_1+b_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_p+b_{p-1}} & \dfrac{\beta_p}{a_p+b_p} \end{vmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} D &= \beta_p \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{p-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_p+b_{p-1}} & \dfrac{1}{a_p+b_p} \end{vmatrix} \\ &= \beta_p C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) \\ &= \frac{\prod\limits_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)}{\prod\limits_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)} C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p), \end{aligned}$$

d'où l'égalité désirée !

15. En déduire que

$$C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (a_j - a_i) \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant p} (a_i + b_j)}.$$

Correction

On démontre le résultat par récurrence.

Initialisation. Le cas $n = 1$ est immédiat, le déterminant est $\dfrac{1}{a_1 + b_1}$.

Hérédité. Supposons que pour un certain p,

$$C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant p-1} (a_j - a_i) \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant p-1} (b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant p-1} (a_i + b_j)}$$

Alors

$$F(a_p)\, C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)}{\prod\limits_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)} C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p),$$

donc

$$C(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p) = F(a_p)\,C(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1})\frac{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}$$

$$= \underbrace{\frac{(a_p-a_1)\dots(a_p-a_{p-1})}{(a_p+b_1)\dots(a_p+b_p)}}_{\text{par définition de } F}\underbrace{\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant p-1}(a_j-a_i)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant p-1}(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p-1}(a_i+b_j)}}_{\text{par H.R.}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}$$

$$= \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant p}(a_j-a_i)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant p}(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p}(a_i+b_j)},$$

d'où l'hérédité, et le résultat par récurrence.

B-III. Preuve du théorème

On note $\lambda_0 = k$ et, pour pour $i \in [\![0,\ n]\!]$, $\mu_i = \lambda_i + \dfrac{1}{2}$. Le réel positif $d(p_k, E_n)$ désigne toujours la distance de la fonction $p_k : t \mapsto t^k$ au sous-espace vectoriel de dimension finie E_n.

16. Démontrer, en exprimant $d(p_k, E_n)^2$ comme un déterminant de Cauchy, que

$$d(p_k,E_n)^2 = \frac{1}{1+2k}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)^2.$$

Correction

On a, par la question 6. $\left\langle p_{\lambda_i} | p_{\lambda_j}\right\rangle = \dfrac{1}{1+\lambda_i+\lambda_j} = \dfrac{1}{\mu_i+\mu_j}$, donc

$$\boxed{d(p_k,E_n)^2 = \frac{C(\mu_0,\dots,\mu_n,\mu_0,\dots,\mu_n)}{C(\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_1,\dots,\mu_n)}}.$$

On sait que

$$C(\mu_0,\dots,\mu_n,\mu_0,\dots,\mu_n) = \frac{\prod\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n}(\mu_j-\mu_i)\prod\limits_{0\leqslant i<j\leqslant p}(\mu_j-\mu_i)}{\prod\limits_{0\leqslant i,j\leqslant p}(\mu_i+\mu_j)} = \frac{\left(\prod\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n}(\mu_j-\mu_i)\right)^2}{\prod\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n}(\mu_i+\mu_j)}$$

et que

$$C(\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_1,\dots,\mu_n) = \frac{\left(\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\mu_j-\mu_i)\right)^2}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\mu_i+\mu_j)},$$

d'où

$$\frac{C(\mu_0,\dots,\mu_n,\mu_0,\dots,\mu_n)}{C(\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_1,\dots,\mu_n)} = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n}(\mu_j-\mu_0)\right)^2}{2\mu_0\prod_{j=1}^{n}(\mu_0+\mu_j)^2},$$

d'où

$$d(p_k,E_n)^2 = \frac{\prod_{j=1}^{n}(\mu_j-\mu_0)^2}{2\mu_0\prod_{j=0}^{n}(\mu_0+\mu_j)^2} = \frac{1}{2k+1}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j-k}{\lambda_j+k+1}\right)^2,$$

d'où $\boxed{d(p_k,E_n)^2 = \frac{1}{2k+1}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{2k+1}{\lambda_j+k+1}\right)^2,}$ d'où le résultat.

On suppose de plus que $\forall i\geqslant 1,\ k\neq\lambda_i$.

17. Montrer qu'il existe un entier non nul N tel que $\forall i\geqslant N,\quad 1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}>0$.

Correction

Comme $\lambda_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} +\infty$, $1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$, donc $1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}>0$ à partir d'un certain rang N.

18. Quelle est la nature de la série $\sum_{i\geqslant N}\ln\left(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)$? En déduire que $d(p_k,E_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Correction

On va comparer des termes généraux de séries de signes constants : quand i tend vers $+\infty$,

$$\ln\left(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)\sim-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\sim-\frac{2k+1}{\lambda_i},$$

terme général d'une série divergente vers $-\infty$ par hypothèse.
Donc $\sum_{i\geqslant N}\ln\left(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)$ diverge vers $-\infty$. Donc, à partir du rang N :

$$d(p_k,E_n)=\frac{1}{2k+1}\prod_{1\leqslant i<N}\left(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)\times\exp\left(\sum_{i=N}^{n}\ln\left(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

19. Démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left\| p_k - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Correction

Pour $\varepsilon > 0$, on peut, d'après ce qui précède, trouver n tel que $d(p_k, E_n) < \varepsilon^2$. Or :

$$d(p_k, E_n) = \left\| p_k - \pi_{E_n}(p_k) \right\|^2, \qquad \text{où } \pi_{E_n}(p_k) \text{ est le projeté orthogonal de } p_k \text{ sur } E_n$$

$\pi_{E_n}(p_k)$ étant par définition combinaison linéaire des $\left(p_{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a bien :

$$\exists\, a_1, \ldots, a_n \quad , \quad \left\| p_k - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i} \right\| \leqslant \varepsilon$$

20. En déduire que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left\| Q - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

On définit $\|\cdot\|_\infty$ par, pour tout f dans E, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

21. Justifier l'existence de cette borne supérieure et montrer que si $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \|f_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exhiber un contre-exemple montrant que la réciproque de la proposition ci-dessus est fausse.

Correction

Soit f dans E. Alors

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \leqslant \sqrt{\int_0^1 \|f\|_\infty^2\, dt} = \|f\|_\infty .$$

D'où le résultat demandé.

La réciproque est fausse : si $f_n : x \mapsto x^n$, alors $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)^2 dt = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\|f_n - 0\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors que

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = 1,$$

qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On admet le théorème d'approximation de Weierstrass :

Théorème 1

Pour toute f de E, il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $\|f-P_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

22. Démontrer que pour toute f dans E, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n$, i.e. de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$, telle que $\|f-g_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Correction

Soit $f \in E$. On va montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists Q_\varepsilon \in \mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}},\ \|f-Q_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$$

En effet en appliquant cette propriété à une suite (ε_n) tendant vers 0 on obtiendra une suite $\left(Q_{\varepsilon_n}\right)$ telle que $\|f-Q_{\varepsilon_n}\| \leqslant \epsilon_n$, ce qui est le résultat demandé. Soit alors $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Weierstrass on dispose d'un polynôme P vérifiant :

$$\|f-P\|_\infty = \sup_{t\in[0\ 1]} |f(t)-P(t)| \leqslant \varepsilon/2$$

On a ainsi, par la question (i) : $\|f-P\| \leqslant \varepsilon/2$

Écrivons enfin $P = \sum\limits_{k=0}^{K} \alpha_k p_k$ et posons $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{K} |\alpha_k|$. Pour chaque k on peut trouver, par la question 10.(c), $q_k \in \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n$ vérifiant :

$$\|p_k - q_k\| \leqslant \frac{\varepsilon/2}{\alpha+1}$$

On a alors, en posant $Q = \sum\limits_{k=0}^{K} \alpha_k q_k$:

$$\|P-Q\| = \|\sum_{k=0}^{K} \alpha_k(p_k-q_k)\| \leqslant \sum_{k=0}^{K} |\alpha_k|\|p_k-q_k)\| \leqslant \frac{\varepsilon/2}{\alpha+1}\sum_{k=0}^{K}|\alpha_k| = \varepsilon/2\times\frac{\alpha}{\alpha+1} < \varepsilon/2$$

et, finalement, on obtient

$$\|f-Q\| = \|f-P+P-Q\| \leqslant \|f-P\| + \|P-Q\| \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$$

B-IV. Extension à la norme de la convergence uniforme

On va même démontrer un peu mieux i.e. que pour tout f dans E, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\|f-g_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit alors Q un polynôme et $\varepsilon > 0$.

23. Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\lambda_n > 1$, et démontrer qu'il existe $g \in \mathrm{Vect}(p_{\lambda_i - 1})_{i \geqslant N}$ tel que $\|Q' - g\| \leqslant \varepsilon$.

Correction

Comme $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\lambda_n > 1$ à partir d'un certain rang N.

De plus, $\lambda_i - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ et $\sum \dfrac{1}{\lambda_i - 1}$ diverge (le terme général étant à considérer à partir du rang N).

Ainsi, par le théorème vu précédemment, il existe $g \in \mathrm{Vect}(p_{\lambda_i - 1})_{i \geqslant N}$ tel que $\|Q' - g\| \leqslant \varepsilon$.

Soit h la primitive de g égale à $Q(0)$ en 0.

24. Démontrer alors que pour tout x dans $[0,1]$, $|Q(x) - h(x)| \leqslant \|Q' - g\|$ et démontrer que pour tout f dans E, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\|f - g_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Correction

Soit $x \in [0,1]$. On sait que

$$\begin{aligned}
|Q(x) - h(x)| &= \left|\int_0^x Q'(t) - h'(t)dt\right| \\
&\leqslant \int_0^x |Q'(t) - h'(t)|dt \\
&\leqslant \sqrt{\int_0^x 1dt}\sqrt{\int_0^x (Q'(t) - h'(t))^2 dt} \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \sqrt{x}\,\|Q' - h'\|_2 \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existait h dans $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ tel que $\|Q - h\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, si $f \in E$, si $n \in \mathbb{N}$, en posant $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^n}$, on obtient :

- par le théorème de Weierstrass, l'existence de Q_n tel que $\|f - Q_n\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$,
- par ce que l'on vient de démontrer, l'existence de $h_n \in \mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\|Q_n - h_n\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$.

Ainsi, $\|f - h_n\|_\infty \leqslant \|f - Q_n\| + \|Q_n - g_n\| \leqslant 2\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où le résultat désiré !

B-V. Étude d'une réciproque

25. Démontrer la réciproque du théorème de Müntz : si $\lambda_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si $\lambda_i > 0$ pour tout i, si pour toute f dans E, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$, telle que $\|f - g_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la série de terme général $\dfrac{1}{\lambda_i}$ diverge.

On pourra étudier la distance de $t \mapsto t^k$ à $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$ pour un k bien choisi.

Correction

Soit k un réel différent de λ_i pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Par le résultat que l'on suppose vrai, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$, telle que $\|p_k - g_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la distance de p_k à $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est nulle, donc

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui implique que la série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)$ diverge, i.e., comme $\lambda_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que

$$\ln\left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right) \underset{i\to+\infty}{\sim} -\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} \underset{i\to+\infty}{\sim} -\frac{2k+1}{\lambda_i}.$$

Donc la série de terme général $-\dfrac{2k+1}{\lambda_i}$ diverge, donc la série de terme général $\dfrac{1}{\lambda_i}$ aussi !