DM 20
pour le lundi 10 juin

Une seule formule, un seul problème ! Durée théorique : 2h.

Problème 1. Dérivation sous le signe intégrale et application

A. Le théorème

Soient $a < b$ deux réels, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout t dans $[a, b]$, $\alpha(t) \geqslant 0$, et F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)}dt.$$

Le but de cette partie est de démontrer que F est dérivable et de déterminer une expression de sa dérivée.

1. Soit t dans $[a, b]$. Démontrer qu'il existe une constante positive K telle que pour tous x et x_0 dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$\left|\beta(t)e^{-x\alpha(t)} - \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} + (x - x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\right| \leqslant \frac{1}{2}K(x - x_0)^2.$$

Correction

Notons $f : x \mapsto \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)}$. Alors comme pour tout x positif, $f'(x) = -\alpha(t)\beta(t)e^{-x\alpha(t)}$ et $f''(x) = \alpha^2(t)\beta(t)e^{-x\alpha(t)}$, on en déduit, comme $\mathfrak{Re}(\alpha(t)) \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$,

$$|f''(x)| \leqslant |\alpha(t)|^2|\beta(t)| \leqslant M_1M_2^2.$$

D'où, par le même raisonnement qu'à la question **??**, avec $\alpha(t) = \omega$ et $\beta(t) = \rho$,

$$\boxed{\left|\beta(t)e^{-x\alpha(t)} - \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)} + (x - x_0)\beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}\right| \leqslant \frac{1}{2}M_1M_2^2(x - x_0)^2.}$$

2. En déduire que pour tout x et x_0 dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$\left|\int_a^b \beta(t)e^{-x\alpha(t)}dt - \int_a^b \beta(t)e^{-x_0\alpha(t)}dt + (x - x_0)\int_a^b \beta(t)\alpha(t)e^{-x_0\alpha(t)}dt\right| \leqslant \frac{b-a}{2}K(x-x_0)^2.$$

Correction

Attention à ne pas intégrer trop brutalement !On écrit que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \beta(t)\mathrm{e}^{-x\alpha(t)}dt - \int_a^b \beta(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}dt + (x-x_0)\int_a^b \beta(t)\alpha(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}dt\right| \\
&= \left|\int_a^b \left(\beta(t)\mathrm{e}^{-x\alpha(t)} - \beta(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)} + (x-x_0)\beta(t)\alpha(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}\right) dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b \left|\beta(t)\mathrm{e}^{-x\alpha(t)} - \beta(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)} + (x-x_0)\beta(t)\alpha(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}\right| dt \\
&\leqslant \int_a^b \frac{b-a}{2} M_1 M_2^2 (x-x_0)^2 dt \text{ par la question précédente.} \\
&\boxed{\leqslant \frac{(b-a)^2}{2} M_1 M_2^2 (x-x_0)^2}.
\end{aligned}$$

3. Déduire de la question précédente que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x_0) = -\int_a^b \beta(t)\alpha(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}dt.$$

Correction

Soient x et x_0 dans $\mathbb{R}_+^*$, distincts. Notons $G : x \mapsto -\int_a^b \beta(t)\alpha(t)\mathrm{e}^{-x\alpha(t)}dt$. La question précédente peut se réécrire sous la forme

$$|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)G(x_0)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} M_1 M_2^2 (x-x_0)^2,$$

soit, en divisant par $|x-x_0| \neq 0$,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - G(x_0)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} M_1 M_2^2 x - x_0| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\boxed{\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} G(x_0)}$, ce qui signifie que $\boxed{F \text{ est dérivable en } x_0}$ et que $\boxed{F'(x_0) = G(x_0).}$

B. Une application

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose

- $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt,$
- $G(x) = F(x^2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt,$

- $H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

4. Justifier que F, G et H sont définies, dérivables sur $\mathbb{R}$, et démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $G'(x) = -2H'(x)H(x)$.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt \\ &= -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt. \end{aligned}$$

On effctue le changement de variables $u = xt$. Quand $t = 0$, $u = 0$, quand $t = 1$, $u = x$. $e^{-(xt)^2} = e^{-u^2}$, et $du = xdt$. Donc

$$\boxed{G'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2H'(x)H(x).}$$

5. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $G(x) = -H(x)^2 + \frac{\pi}{4}$.

Correction

Comme $x \mapsto 2H'(x)H(x)$ est la dérivée de $x \mapsto H(x)^2$, on en déduit qu'il existe une constante K telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$G(x) = -H(x)^2 + K.$$

En évaluant en 0, il vient $G(0) = -H(0)^2 + K$, i.e., comme $G(0) = F(0) = \frac{\pi}{4}$ et $H(0) = 0$, $K = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$\boxed{G(x) = -H(x)^2 + \frac{\pi}{4}.}$$

6. Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $|G(x)| \leqslant e^{-x^2}$, et en déduire la limite de G en $+\infty$, puis la valeur de

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

C'est ce qu'on appelle l'intégrale de Gauss !

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}_+$. Alors, comme l'intégrande de G est positif,

$$|G(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$, et $x^2(1+t^2) \geqslant x^2$, i.e. $e^{-x^2(1+t^2)} \leqslant e^{-x^2}$, donc

$$\boxed{|G(x)| \leqslant \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}.}$$

$\boxed{\text{On en déduit, par encadrement, que } G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$ On en déduit alors que $-H(x)^2 + \dfrac{\pi}{4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, i.e. $H(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{4}$, i.e., comme H est positive pour tout x positif, $H(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\int_0^x e^{-t^2} dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$