# DM 20
pour le lundi 10 juin

Une seule formule, un seul problème ! Durée théorique : 2h.

## Problème 1. Dérivation sous le signe intégrale et application

### A. Le théorème

Soient $a < b$ deux réels, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $t$ dans $[a, b]$, $\alpha(t) \geqslant 0$, et $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_a^b \beta(t)\mathrm{e}^{-x\alpha(t)}dt.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $F$ est dérivable et de déterminer une expression de sa dérivée.

**1.** Démontrer qu'il existe une constante positive $K$ telle que pour tout $t$ dans $[a, b]$, pour tous $x$ et $x_0$ dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$\left|\beta(t)\mathrm{e}^{-x\alpha(t)} - \beta(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)} + (x - x_0)\beta(t)\alpha(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}\right| \leqslant \frac{1}{2}K(x - x_0)^2.$$

**2.** En déduire que pour tout $x$ et $x_0$ dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$\left|\int_a^b \beta(t)\mathrm{e}^{-x\alpha(t)}dt - \int_a^b \beta(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}dt + (x - x_0)\int_a^b \beta(t)\alpha(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}dt\right| \leqslant \frac{b-a}{2}K(x-x_0)^2.$$

**3.** Déduire de la question précédente que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x_0) = -\int_a^b \beta(t)\alpha(t)\mathrm{e}^{-x_0\alpha(t)}dt.$$

Justifier que l'on a aussi la dérivabilité de $F$ à droite en 0.

### B. Une application

Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, on pose

- $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$,
- $G(x) = F(x^2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$,
- $H(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$.

**4.** Justifier que $G$ et $H$ sont définies, dérivables sur $\mathbb{R}$, et démontrer que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $G'(x) = -2H'(x)H(x)$.

**5.** En déduire que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $G(x) = -H(x)^2 + \dfrac{\pi}{4}$.

**6.** Démontrer que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}_+$, $|G(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$, et en déduire la limite de $G$ en $+\infty$, puis la valeur de

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

C'est ce qu'on appelle l'intégrale de Gauss !