Chapitre 01
Logique et raisonnement

1 Éléments de logique

1.1 Propositions, valeur de vérité

Définition 1

On appelle *proposition* toute phrase $\mathcal{P}$ ayant un sens et telle qu'on puisse répondre à la question « $\mathcal{P}$ est-elle vraie ? ».

Exemple 2

Par exemple,

1. « Je suis professeur de mathématiques » est une proposition.
2. « $\displaystyle\int_1^2 x dx$ » n'est pas une proposition.
3. En revanche, « $\displaystyle\int_1^2 x dx = 18\pi$ » est une proposition (fausse, mais c'est tout de même une proposition).

Définition 3

La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai (V) ou le faux (F), mais jamais les deux (principe du tiers exclus).
Deux propositions de même valeur de vérité sont dites *équivalentes*.

Point de méthode 4

Pour prouver qu'une proposition mathématique est vraie, il suffit de prouver toute proposition mathématique équivalente.

Exemple 5

Si je veux montrer $x \geqslant 5$, je peux démontrer $x - 5 \geqslant 0$.

1.2 Connecteurs logiques

Lorsqu'on a plusieurs propositions, on peut les combiner pour en former de nouvelles, à l'aide de connecteurs logiques. Nous ne donnerons pas la définition formelle d'un connecteur logique : pensez-y comme un mot de liaison que l'on utilise pour transformer une ou plusieurs proposition en une nouvelle proposition. Par exemple, « et » , « ou » , « non »...

Remarque 6

(Culturelle) Nous nous intéresserons dans cette section uniquement à des connecteurs dits *vérifonctionnels*, c'est-à-dire dont la valeur de vérité ne dépend que de la valeur de vérité des propositions connectées.
Or, lorsque l'on fait des maths, on n'utilise pas que des connecteurs de ce type : par exemple, si x est un réel strictement positif, lorsque j'écris

$$xy \leqslant xz \text{ donc } y \leqslant z \text{ car } x > 0,$$

le « car » ou le « parce que » n'est pas un connecteur vérifonctionnel. En effet, $x > 0$ est vrai, mais « nous sommes en MPSI 1 » l'est aussi. Pourtant, la proposition

$$xy \leqslant xz \text{ donc } y \leqslant z \text{ car nous sommes en MPSI 1}$$

ne peut pas être considérée comme valable !

Les connecteurs logiques que nous allons manipuler ne dépendant que de la valeur de vérité des propositions en entrée, on peut les expliciter à l'aide d'une **table de vérité**, dans laquelle nous mettrons en entrée les valeurs de vérité possibles des propositions au départ et en sortie la valeur de la nouvelle proposition.

Définition 7

Soit $\mathcal{P}$ une proposition. On définit la négation de $\mathcal{P}$, notée non$(\mathcal{P})$, $\overline{\mathcal{P}}$ ou $\neg\mathcal{P}$ comme la proposition vraie si $\mathcal{P}$ est fausse et fausse si $\mathcal{P}$ est vraie.
Le connecteur de négation possède la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
F	V
V	F

Exemple 8

- Si $\mathcal{P} =$ (J'ai faim.) g, non$(\mathcal{P}) =$ (Je n'ai pas faim.).
- Si $\mathcal{P} = (x \geqslant 3)$, non$(\mathcal{P}) = (x < 3)$ (Attention au passage d'une égalité large à une égalité stricte !).

Définition 9

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On définit la conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, est la proposition vraie si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément vraies, fausse sinon. On la résume avec la table de vérité suivante

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exemple 10

- Si $\mathcal{P} = (x \geqslant 3)$ et $\mathcal{Q} = (x \neq 3)$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} = (x > 3)$.
- Si $ABCD$ est un quadrilatère, si $\mathcal{P}$ est « $ABCD$ est un rectangle » et $\mathcal{Q}$ est « $ABCD$ est un losange », alors $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ est la proposition « $ABCD$ est un carré » .

Définition 11

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On définit la disjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathbb{Q}$, notée $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, comme la proposition étant vraie si au moins l'une des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie. On la résume par la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Exemple 12

Si $\mathcal{P} = (x < 2)$ et $\mathcal{Q} = (x = 2)$, alors $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} = (x \leqslant 2)$.

Exercice 13

Soient x et y sont deux réels. On définit $\max(x,y)$ et $\min(x,y)$ par :

$$\min(x,y) = \begin{cases} x \text{ si } x \leqslant y \\ y \text{ sinon.} \end{cases} \text{ et } \max(x,y) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant y \\ y \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit A un réel. Exprimer, à l'aide des propositions $(x \leqslant A)$, $(x \geqslant A)$, $(y \leqslant A)$ et $(y \geqslant A)$ les propositions

- $\min(x,y) \leqslant A$,
- $\max(x,y) \geqslant A$,
- $\max(x,y) \leqslant A$,
- $\max(x,y) \geqslant A$.

Proposition 14 (Règles de calcul propositionnel)

Plusieurs règles régissent les connecteurs logiques définis précédemment :

1. (involutivité de la négation)
   Soit $\mathcal{P}$ une proposition logique. Alors non(non($\mathcal{P}$)) et $\mathcal{P}$ sont équivalentes.
2. (double distributivité)
   Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ trois propositions. Alors
   - $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ est logiquement équivalente à $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$,
   - $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ est logiquement équivalente à $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$.
3. (commutativité)
   Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux propositions, alors $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$ sont logiquement équivalentes.
4. (associativité)
   Si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont trois propositions,
   - $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ sont équivalentes : on note alors $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}$ (sans parenthèse)
   - $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ sont équivalentes : on note alors $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$ (sans parenthèse)
5. (neutre et absorbance)
   Si $\mathcal{P}$ est une proposition,
   - $\mathcal{P} \wedge V$ est logiquement équivalente à $\mathcal{P}$ (on dit que V est neutre pour $\wedge$)
   - $\mathcal{P} \vee V$ est logiquement équivalente à V (on dit que V est absorbant pour $\vee$)
   - $\mathcal{P} \wedge F$ est logiquement équivalente à F (on dit que F est absorbant pour $\wedge$)
   - $\mathcal{P} \vee F$ est logiquement équivalente à $\mathcal{P}$ (on dit que F est neutre pour $\vee$)
6. (lois de Morgan)
   Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions logiques. Alors
   - $\neg(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q})$ et $(\neg(\mathcal{P})$ ou $\neg(\mathcal{Q}))$ sont équivalentes.
   - $\neg(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$ et $(\neg(\mathcal{P})$ et $\neg(\mathcal{Q}))$ sont équivalentes.

Exercice 15

Si $\mathcal{P} = (x \geqslant 3)$ et $\mathcal{Q} = (x \neq 3)$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} = (x > 3)$. Vérifier la première loi de Morgan.

Définition 16

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On définit l'implication de $\mathcal{Q}$ par $\mathcal{P}$, notée $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, comme la proposition étant vraie si $\mathcal{P}$ est fausse ou si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément vraies. En d'autres termes,

- $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est logiquement équivalente à $(\neg\mathcal{P}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$
- la table de vérité de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Remarque 17

Le premier membre d'une implication n'a pas besoin d'être vrai pour que cette implication soit vraie ! ! Ainsi,

- « Mon chat est président de la république $\Rightarrow 2 + 2 = 5$ »est vraie !
- si x est un réel, $(x \geqslant 2) \Rightarrow (x^2 \geqslant 4)$ est vraie (et ce quel que soit le réel x). Notamment, $(-1 \geqslant 2) \Rightarrow (1 \geqslant 4)$ est vraie !

Proposition 18

La proposition $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est équivalente à la proposition non$(\mathcal{P})$ ou $\mathcal{Q}$. En particulier, la négation de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est équivalente à la proposition $\mathcal{P}$ et non$(\mathcal{Q})$.

Démonstration

On peut faire cette preuve avec une table de vérité ou bien avec du calcul propositionnel. Je vais faire la seconde. On sait que $(\neg\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}$ est logiquement équivalente à

$$(\neg\mathcal{P}) \vee (\mathcal{Q} \wedge V)$$

i.e. à

$$(\neg\mathcal{P}) \vee (\mathcal{Q} \wedge (\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{P}))$$

c'est-à-dire, par distributivité, à

$$(\neg\mathcal{P}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \neg\mathcal{P}))$$

soit, par commutativité, à
$$(\neg\mathcal{P}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \neg\mathcal{P})) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P})$$
donc, par distributivité, à
$$(\neg\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee V)) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P})$$
ou encore à
$$\neg\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}),$$
c'est-à-dire à $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. D'où le résultat ! ■

Proposition 19

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est équivalente à $(\neq \mathcal{Q}) \Rightarrow (\neg\mathcal{P})$.

Définition 20

On dit que $(\neq \mathcal{Q}) \Rightarrow (\neg\mathcal{P})$ est la **contraposée** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

Démonstration

Par la proposition 18, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est logiquement équivalente à
$$\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q},$$
elle-même logiquement équivalente à
$$\neg(\neg\mathcal{Q}) \vee \neg\mathcal{P},$$
i.e. à $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$. D'où le résultat ! ■

Point de méthode 21

Pour prouver une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on commence par supposer que $\mathcal{P}$ est vraie, et on en déduit que $\mathcal{Q}$ est vraie.
En termes de rédaction faire attention dès maintenant.

- Pour **démontrer** que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on écrit « Supposons $\mathcal{P}$. Montrons $\mathcal{Q}$ »
- Pour **utiliser** le fait que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on écrit « on sait que $\mathcal{P}$, or $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ donc $\mathcal{Q}$ »

Attention notamment aux rédactions suivantes : si je demande « Soit x un réel tel que $x \geqslant 2$. Montrer que $\frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{5}$ » , une rédaction comme celle-ci

On sait que

$$\begin{aligned} x \geqslant 2 &\Rightarrow x^2 \geqslant 4 \\ &\Rightarrow 1 + x^2 \geqslant 5 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{5} \end{aligned}$$

ne me convient pas ! En effet, là on a juste énoncé une implication. Si l'on rédige comme cela, il faut en plus écrire « or, $x \geqslant 2$ donc $\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{5}$ » Mieux vaut écrire :

On sait que $x \geqslant 2$.
Donc $x^2 \geqslant 4$, d'où $1 + x^2 \geqslant 5$.
Ainsi, $\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{5}$, ce qui est le résultat désiré !

Point de méthode 22

Pour montrer que $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est fausse et on démontre que $\mathcal{Q}$ est vraie !
Ainsi, si l'on veut démontrer que, si x est un réel,

$$\max(3 - x, x^2 + 1) \geqslant 2,$$

on peut raisonner ainsi :

On cherche à démontrer que $\max(3 - x, x^2 + 1) \geqslant 2$, c'est-à-dire que $3 - x \geqslant 2$ ou $x^2 + 1 \geqslant 2$.
Supposons que $3 - x \leqslant 2$.
Alors $1 \leqslant x$, donc $1 \leqslant x^2$, donc $2 \leqslant x^2 + 1$.

Remarque 23

On a vu que si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, alors la contraposée $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$ était vraie.
En revanche, il n'y a aucune raison que la **réciproque**, $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, soit vraie !

Exemple 24

Ainsi, si $ABCD$ est un quadrilatère, si $\mathcal{P}$ est la proposition « $ABCD$ est un carré » et $\mathcal{Q}$ est la proposition « $ABCD$ est un rectangle »,

- $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie (un carré est un rectangle),

- la contraposée, $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$ est vraie (si on n'est pas un rectangle, on n'a aucune chance d'être un carré),
- mais la réciproque, $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$, n'est pas, a priori vraie (on peut être un rectangle sans être un carré !)

Définition 25

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On définit l'équivalence entre $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$, notée $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, comme la proposition équivalente à

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$$

Elle est tout aussi bien définie par la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Point de méthode 26

Pour montrer une équivalence,

- si le raisonnement est assez simple et court, et si on est parfaitement sûr de ce que l'on fait, on peut raisonner par équivalences successives.
  Ex. Résolution de petites équations. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$x - 3 = 2 + 5x \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.$$
  Il faut bien remarquer qu'en écrivant des équivalences successives, on ne dit jamais que l'une des propositions est vraie, mais que l'équivalence toute entière est vraie !
- dans les cas les plus complexes, son préfèrera un raisonnement par **double implication**. Si l'on doit démontrer $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

> $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\mathcal{P}$, montrons $\mathcal{Q}$.
> $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathcal{Q}$, montrons $\mathcal{P}$.

- Attention aux équivalences qui n'en sont pas ! Dès qu'il y a le moindre doute, des raisonnements par implications uniquement permettent d'éviter de voir trop d'équivalences là où il n'y en a pas !

Définition 27 (Vocabulaire des équivalences)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

1. Lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que « $\mathcal{Q}$ si $\mathcal{P}$ ». $\mathcal{P}$ est une *condition suffisante* pour $\mathcal{Q}$. On dit qu'il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, ou que « $\mathcal{Q}$ si $\mathcal{P}$ » .
2. Lorsque $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est vraie, on dit que « $\mathcal{Q}$ seulement si $\mathcal{P}$ ». $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire* pour $\mathcal{Q}$. On dit qu'il faut que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, ou que « $\mathcal{Q}$ seulement si $\mathcal{P}$ ».
3. Lorsque $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que « $\mathcal{Q}$ si et seulement si $\mathcal{P}$ ». $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* (abrégée en CNS) pour $\mathcal{Q}$. On dit qu'il faut et qu'il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, ou encore que « $\mathcal{Q}$ si et seulement si (ssi) $\mathcal{P}$ » .

Exemple 28

1. Un carré est un rectangle, c'est à dire que ($ABCD$ carré) $\Rightarrow$ ($ABCD$ rectangle). Autrement dit, « être un carré » est une condition suffisante pour « être un rectangle ». De même, « être un rectangle » est une condition nécessaire pour « être un carré ».
2. On connaît depuis la quatrième l'équivalence « (un triangle est rectangle) $\Leftrightarrow$ (le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés) ».
   On dit donc que « un triangle est rectangle si et seulement si le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés », ou que (le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés) est une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle soit rectangle.

1.3 Quantificateurs

Définition 29

Lorsqu'une proposition $\mathcal{P}$ dépend d'un paramètre x et qu'on veut le notifier, on note $\mathcal{P}(x)$ la proposition, qui peut donc prendre différentes valeurs de vérités suivant la valeur de x. On dit alors que $\mathcal{P}$ est un prédicat.

Exemple 30

- Soit $\mathcal{P}(x)$ la proposition $x > 3$. $\mathcal{P}(1)$ est fausse, mais $\mathcal{P}(4)$ est vraie.
- Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition (3 divise n). $\mathcal{P}(9)$ est vraie, mais pas $\mathcal{P}(10)$.
- Soit $\mathcal{P}(x, y)$ la proposition $x < y$. $\mathcal{P}(1, 3)$ est vraie, mais pas $\mathcal{P}(1, 1)$.

Dans les définitions et propositions suivantes, on va utiliser le mot « ensemble » bien que l'on n'ait pas encore parlé d'ensemble. On utilisera notamment le symbole $\in$ pour signifier l'appartenance à un ensemble.

Définition 31 (Quantificateurs)

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat, E un ensemble sur lequel $\mathcal{P}$ a un sens.

1. (quantificateur universel) La proposition $(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x))$ se lit « pour tout x dans E, $\mathcal{P}(x)$ » et est vraie si et seulement si tous les éléments de E ont la propriété $\mathcal{P}$. On dit aussi « quel que soit x dans E, $\mathcal{P}(x)$ ».
2. (quantificateur existentiel) La proposition $(\exists x \in \mathbb{E},\ \mathcal{P}(x))$ se lit « il existe un x dans E, $\mathcal{P}(x)$ » et est vraie si et seulement si un élément de E au moins a la propriété $\mathcal{P}$.s

Exemple 32

1. Notons $a(e)$ l'âge d'un élève e. Le plus jeune élève j de la classe C peut être caractérisé par la proposition suivante :
$$\forall e \in C,\ a(e) \geqslant a(j).$$
2. La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ est vraie.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, la proposition « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » se traduit par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Remarque 33

1. En logique formelle, on ne précise pas l'ensemble auquel appartient la variable du prédicat. Ainsi on écrira $\forall x, \mathcal{P}(x)$ ou $\exists x, \mathcal{P}(x)$.
2. Comment traduire alors le $\in E$ dans les propositions ?
   - la proposition $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est équivalente à
   $$\forall x,\ x \in E \Rightarrow \mathcal{P}(x).$$
   - la proposition $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est équivalente à
   $$\exists x,\ x \in E \wedge \mathcal{P}(x).$$

Exercice 34

1. si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, traduire
   - f est positive
   - f s'annule
   - f est croissante
   - f est non identiquement nulle
2. si E est un ensemble fini constitué de nombres réels, on note $\max(E)$ son plus grand élément et $\min(E)$ son plus petit élément. Soit $A \in \mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs

- $\max(E) \leqslant A$,
- $\max(E) \geqslant A$,
- $\min(E) \leqslant A$,
- $\min(E) \geqslant A$.

Remarque 35

Le $\forall$ est une généralisation du « et » , le $\exists$ est une généralisation du « ou » .

Proposition 36 (Règles d'interversion et de distributivité)

1. (interversion de quantificateurs) Soit $\mathcal{P}(x, y)$ un prédicat dépendant de deux paramètres x et y, variant dans des ensembles E et F.

- Les propositions
$$(\forall x \in E, \forall y \in F, \mathcal{P}(x, y))$$
et
$$(\forall y \in F, \forall x \in E, \mathcal{P}(x, y))$$
sont équivalentes.
- Les propositions
$$(\exists x \in E, \exists y \in F, \mathcal{P}(x, y))$$
et
$$(\exists y \in F, \exists x \in E, \mathcal{P}(x, y))$$
sont équivalentes.

2. (quantificateurs et connecteurs) Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux prédicats dépendant de variables définies dans un ensemble E.

- Les propositions
$$\forall x \in E,\ (\mathcal{Q}(x) \wedge \mathcal{R}(x))$$
et
$$\big(\forall x \in E,\ \mathcal{Q}(x)\big) \wedge \big(\forall x \in E,\ \mathcal{R}(x)\big)$$
sont équivalentes.
- Les propositions
$$\exists x \in E,\ (\mathcal{Q}(x) \vee \mathcal{R}(x))$$
et
$$\big(\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x)\big) \vee \big(\exists x \in E,\ \mathcal{R}(x)\big)$$
sont équivalentes.

Remarque 37

ATTENTION ! Toutes les propositions non écrites sont, en général, fausses.

1. On n'intervertit pas $\forall$ et $\exists$. En effet, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant m, \tag{$\mathcal{P}_1$}$$

et

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant m, \tag{$\mathcal{P}_2$}$$

alors dans $\mathcal{P}_1$, le m dépend de x, alors que dans $\mathcal{P}_2$, le m est indépendant de x.
D'ailleurs, la proposition $\mathcal{P}_1$ est toujours vraie, alors que la proposition $\mathcal{P}_2$ n'est vraie que si f est minorée.

2. Si

$$\forall x \in E,\ \mathcal{Q}(x) \vee \mathcal{R}(x) \tag{$\mathcal{A}$}$$

et

$$\big(\forall x \in E,\ \mathcal{Q}(x)\big) \vee \big(\forall x \in E,\ \mathcal{R}(x)\big) \tag{$\mathcal{B}$}$$

$\mathcal{B}$ est plus restrictive que $\mathcal{A}$: en effet, dans $\mathcal{B}$, tous les x de E choisissent $\mathcal{Q}$ ou bien tous les x de E choisissent $\mathcal{R}$.
Exemple : si E est l'ensemble des être humains, si $\mathcal{Q}(x)$ est « x vit dans l'hémisphère Nord » et $\mathcal{R}(x)$ est « x vit dans l'hémisphère Sud », alors $\mathcal{A}$ est vraie mais $\mathcal{B}$ est fausse.

3. Si

$$\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x) \wedge \mathcal{R}(x) \tag{$\mathcal{C}$}$$

implique la proposition

$$\big(\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x)\big) \wedge \big(\exists x \in E,\ \mathcal{R}(x)\big), \tag{$\mathcal{D}$}$$

alors $\mathcal{C}$ est plus restrictive, car le x que l'on doit trouver doit vérifier à la fois les deux propriétés.
Dans le même exemple que précédemment, si on suppose que personne n'habite exactement sur l'équateur, alors $\mathcal{D}$ est vraie alors que $\mathcal{C}$ est fausse !

De manière générale, on a la

Proposition 38

1. Soit $\mathcal{P}(x,y)$ un prédicat dépendant de deux paramètres x et y, variant dans des ensembles E et F. Alors la proposition

$$\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y)$$

implique la proposition

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y).$$

2. Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux prédicats dépendant de variables définies dans un ensemble E. Alors
   - la proposition

$$\big(\forall x \in E,\ \mathcal{Q}(x)\big) \vee \big(\forall x \in E,\ \mathcal{R}(x)\big).$$

implique la proposition
$$\forall x \in E,\ \mathcal{Q}(x) \vee \mathcal{R}(x)$$

- la proposition
$$\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x) \wedge \mathcal{R}(x)$$
implique la proposition
$$\left(\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x)\right) \wedge \left(\exists x \in E,\ \mathcal{R}(x)\right).$$

Proposition 39 (Négation des quantificateurs)

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat défini sur un ensemble E.

1. La négation de $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est
$$\exists x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x).$$

2. La négation de $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est
$$\forall x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x).$$

Exemple 40

La négation de « Tous les chats sont noirs » est « Il existe un chat qui n'est pas noir ».
La négation de « Certains hommes mesurent plus de 5 mètres » est « Tous les hommes mesurent moins de 5 mètres ».

Remarque 41

1. Il s'agit de la généralisation des lois de Morgan.

2. On ne change pas le $\in E$. En effet,

- on rappelle que l'on traduit « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » par « $\forall x,\ x \in E \Rightarrow \mathcal{P}(x)$ » . On nie ainsi cette proposition en
$$\exists x,\ \neg\left(x \in E \Rightarrow \mathcal{P}(x)\right),$$
i.e. en
$$\exists x,\ x \in E \wedge \neg\mathcal{P}(x),$$
i.e. en
$$\exists x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x).$$

- on rappelle que l'on traduit « $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » par « $\exists x,\ x \in E \wedge \mathcal{P}(x)$ » . On nie ainsi cette proposition en
$$\forall x,\ \neg\left(x \in E \wedge \mathcal{P}(x)\right),$$

i.e. en
$$\forall x,\ \neg(x \in E) \vee \neg\mathcal{P}(x),$$
i.e. en
$$\forall x \in E,\ x \in E \Rightarrow \neg\mathcal{P}(x).$$

Exercice 42

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
   Soit la proposition $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 3)$. Que signifie-t-elle ? La nier.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
   Soit la proposition $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 3)$. Que signifie-t-elle ? La nier.
3. En anglais, pour dire qu'une fonction est strictement croissante, on dit *increasing*. Pour dire qu'elle est juste croissante (pas nécessairement strictement), on dit *nondecreasing*. Pourquoi est-ce absurde ?

Point de méthode 43

Attention à rédiger proprement si on doit démontrer ou utiliser des propositions avec quantificateurs.

$\boxed{\forall}$

— pour **démontrer** « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » , on écrit
« **Soit** $x \in E$. Démontrons $\mathcal{P}(x)$ »

— pour **utiliser** le fait que la proposition « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » est vraie, on écrit
« **Prenons** $x = \dots$, alors $\mathcal{P}(x)$. »

$\boxed{\exists}$

— pour **démontrer** « $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » , on doit **chercher** et trouver un élément x_0 qui fonctionne, puis on écrit
« **Posons** $x = x_0$. Démontrons $\mathcal{P}(x_0)$ »

— pour **utiliser** le fait que la proposition « $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » est vraie, on écrit
« **On dispose de** $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{P}(x_0)$. »

Exemple 44

Montrons que $f : x \mapsto \dfrac{-2}{1+e^x}$ est croissante et que $g : x \mapsto \cos(x)$ n'est pas croissante.

1. **Soit** $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, **tels que** $a \leqslant b$.
   Alors $e^a \leqslant e^b$ par croissance de l'exponentielle.
   Donc $1 + e^a \leqslant 1 + e^b$.
   Donc $\dfrac{1}{1+e^a} \geqslant \dfrac{1}{1+e^b}$ par décroissance de la fonction inverse.
   Donc $\dfrac{-1}{1+e^a} \leqslant \dfrac{-2}{1+e^b}$ d'où la décroissance de f.
2. Montrons que g n'est pas croissante, i.e. que
$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y) \wedge (g(x) > g(y)).$$

Posons $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y_0 = \frac{3\pi}{4}$. Alors $g\left(\frac{\pi}{4}\right) > g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, donc g n'est pas croissante.

Définition 45

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat défini sur un ensemble E.
La proposition $(\exists! x \in \mathbb{E},\ \mathcal{P}(x))$ se lit « il existe un unique x dans E, $\mathcal{P}(x)$ » et est vraie si et seulement si un élément de E exactement a la propriété $\mathcal{P}$.

Exercice 46

Écrire la proposition $(\exists! x \in \mathbb{E},\ \mathcal{P}(x))$ avec les seuls quantificateurs $\forall$, $\exists$ et les connecteurs logiques.

1.4 Statut des variables

Nous allons faire un point sur le statut des variables dans la rédaction mathématique. Commençons par une remarque.

Remarque 47

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ont un rôle dit *mutificateur* : cela signifie que la variable choisie juste après ces quantificateurs peut être changée sans changer le sens de la proposition. Ainsi, les propositions

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geqslant 0,$$

et

$$\forall y \in \mathbb{R}, y^2 + 1 \geqslant 0,$$

ou encore

$$\forall * \in \mathbb{R}, *^2 + 1 \geqslant 0$$

sont toutes trois équivalentes ! (et d'ailleurs ces propositions ne dépendent d'aucun paramètre)

Définition 48

Dans une expression mathématique, une variable est dite liée ou muette si on peut la remplacer par une autre variable sans changer le sens de l'expression. Sinon la variable est dite libre ou parlante.

Remarque 49

On reconnaît aussi une variable libre au fait qu'elle peut être remplacée par une valeur concrète, et que l'énoncé garde toujours un sens.

Exemple 50

Dans $\int_0^x e^{3t+1}dt$, x est libre et t est muette.

- en effet, $\int_0^x e^{3t+1}dt = \int_0^x e^{3s+1}ds$
- on peut remplacer x par 4 par exemple et l'intégrale a toujours un sens : $\int_0^4 e^{3t+1}dt$ (alors que l'on ne peut pas remplacer t par 4).

Remarque 51

Les variables muettes sont rendues muettes par des mutificateurs : $\int \cdots \mathrm{d} \cdots$, $\cdots \mapsto \cdots$, etc.

Point de méthode 52

Dans une preuve mathématique, il ne doit pas y avoir de variable libre, sauf si elles ont été déclarées dans l'énoncé de la propriété à prouver.

Exemple 53

1. Si l'on veut démontrer « $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n+1)$ est pair » , on ne peut pas commencer par

> Si n est pair, alors...

(j'écrirai rageusement « qui est n ? ? ? ») Il faut écrire

> Soit $n \in \mathbb{N}$.
> Si n est pair, alors...

2. Si l'on veut répondre à la question suivante : « Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n+1)$ est pair », là, n **a été déclaré par l'énoncé.** On peut alors écrire

> Si n est pair, alors...

2 Ensembles

On ne définit pas ce qu'est un ensemble ! On garde la notion intuitive d'ensembles, à voir comme un sac de billes dans lequel les éléments sont des billes.

Définition 54

1. Si E est un ensemble, on note $x \in E$ pour signifier que x appartient à l'ensemble E. Sinon on écrit $x \notin E$.
2. L'ensemble vide est noté $\emptyset$.
3. Un ensemble E est dit décrit en extension si l'on énumère les éléments de cet ensemble (par exemple, $E = \{1, 2, 3\}$).
4. Un ensemble muni d'un seul élément $E = \{x\}$ est appelé *singleton*.
5. Un ensemble de la forme $\{x, y\}$ avec $x \neq y$ est appelé une *paire*.

Définition 55

Soit E un ensemble.

1. Un ensemble F est inclus dans E si
$$\forall x \in F,\ x \in E,$$
i.e. si
$$\forall x,\ x \in F \Rightarrow x \in E.$$
2. Si F est inclus dans E, on note $F \subset E$ et on dit que F est un sous-ensemble de E ou une partie de E.
3. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Définition 56

Soit E un ensemble.

1. Une partie F de E est dite décrite en compréhension s'il existe un prédicat $\mathcal{P}$ défini sur tous les éléments de E tel que F est l'ensemble des éléments de E vérifiant $\mathcal{P}$. On note
$$F = \{x \in E | \mathcal{P}(x)\} \text{ ou bien } F = \{x \in E,\ \mathcal{P}(x)\}.$$
2. Par convention,
$$\{x \in E | V\} = E \text{ et } \{x \in E | F\} = \emptyset.$$

Exemple 57

1. Décrivons en extension et en compréhension l'ensemble A des entiers pairs inférieurs ou égaux à 10 :
   - en extension : $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

- en compréhension : $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \leqslant 10 \wedge n \equiv 0[2]\}$.

2. Décrivons en extension $\mathcal{P}(E)$ où $E = \{1, 2\}$.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

3. Décrivons en extension $\mathcal{P}(E)$ si $E = \emptyset$.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

4. Décrivons en extension $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ si $E = \{1\}$. Déjà,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

donc

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\Big\}.$$

Remarque 58

1. Parfois, lorsqu'on décrit en compréhension un ensemble, on s'autorise une entorse : au lieu d'écrire $\{x \in E | ...\}$, on peut décrire un ensemble en compréhension sous la forme

$$\Big\{\text{expression}(t),\ t \in \dots\Big\}.$$

Ainsi, pour décrire l'ensemble des entiers pairs inférieurs ou égaux à 10, on peut écrire

$$\Big\{2k,\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\Big\}$$

2. $\mathcal{P}(E)$ contient au moins un élément, $\emptyset$. Si $E \neq \emptyset$, il contient au moins deux éléments.
3. si F est un ensemble, $(F \subset E) \Leftrightarrow (F \in \mathcal{P}(E))$.
4. si x est un élément, $(x \in E) \Leftrightarrow (\{x\} \in \mathcal{P}(E))$.
5. Si E est un ensemble à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments.
Explication. Choisir une partie de E, c'est choisir, pour chauqe élément de E, s'il appartient ou non à cette partie. D'où $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ choix possibles.

Point de méthode 59

1. Pour démontrer une proposiiton du type « $F \subset E$ » , on fait une rédaction du type : « soit $x \in F$, montrons que $x \in E$ » .
2. Pour montrer une égalité entre deux ensembles, il peut être utile de procédér par double inclusion.

Exercice 60

Démontrer que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.
Pour cela, considérer, si E était l'ensemble de tous les ensembles,

$$A = \{X \in E |\ X \notin X\}.$$

Définition 61 (Notation d'ensembles particuliers)

On suppose déjà construits $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.

(i) L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est défini par

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

(ii) L'ensemble des irrationnels, noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R},\ x \notin \mathbb{Q}\}.$$

(iii) (intervalles de $\mathbb{R}$) Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Alors on note

$$\begin{aligned}
]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant a\} \\
]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R},\ x < a\} \\
[b, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant b\} \\
]b, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\} \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant a) \text{ et } (x \leqslant b)\}, \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant a) \text{ et } (x < b)\}, \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R},\ (x > a) \text{ et } (x \leqslant b)\}, \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R},\ (x > a) \text{ et } (x < b)\}.
\end{aligned}$$

(iv) Soient m et n deux entiers tels que $m \leqslant n$. Alors on note

$$[\![m; n]\!] = \{p \in \mathbb{N},\ (p \geqslant m) \text{ et } (p \leqslant n)\}.$$

Remarque 62

Il est absurde d'utiliser les notations $[\![m; n[\![$: autant utiliser $[\![m; n-1]\!]$. Il s'agit là d'une différence fondamentale entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ liée à la propriété dite de la borne supérieure : nous verrons cela d'ici le mois de novembre !

Définition 63 (Opérations binaires sur les ensembles)

Soient E et F deux ensembles. On définit les opérations suivantes

1. la réunion de E et F, notée $E \cup F$, est l'ensemble des éléments appartenant à E ou à F :
$$E \cup F = \{x | (x \in E) \vee (x \in F)\}.$$
2. l'intersection de E et F, notée $E \cap F$, est l'ensemble des éléments appartenant à E et à F :
$$E \cup F = \{x | (x \in E) \wedge (x \in F)\}.$$
3. la différence de E et de F, notée $E \setminus F$ et appelée « E privé de F », est l'ensemble
$$E \setminus F = \{x \in \mathbb{E} | x \notin F\}.$$
4. si $F \subset E$, on dit que $E \setminus F$ est le complémentaire de F dans E, noté aussi $\complement_E F$ (notation old school) ou $\overline{F}$.

Exemple 64

Soit E un ensemble. Déterminer les sous-ensembles A et B de E tels que $A \cup B = A \cap B$.

Proposition 65

Soient A, B et C trois ensembles.

1. (commutativité)
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cap B = B \cap A$
2. (associativité)
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.
   - $A \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.
3. (distributivité)
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. (« involutivité »)
   - $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
   - si $B \in \mathscr{P}(A)$, si $\overline{B}$ est le complémentaire de B dans A, alors $\overline{\overline{B}} = B$.
5. (règles de Morgan)
   - $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   - $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

   Si B et C sont des parties de A et si on note toujours $\bar{\ }$ le complémentaire,
   - $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$,
   - $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$.

Démonstration

On ne va pas tout montrer, seulement le premier point du 3..
Plusieurs manières de démontrer les choses.

- manière directe :

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \big\{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B \cup C)\big\} \\ &= \big\{x \mid (x \in A) \wedge \big((x \in B) \vee (x \in C)\big\} \\ &= \big\{x \mid \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big) \vee \big((x \in A) \wedge (x \in C)\big\} \\ &= \big\{x \mid \big((x \in A \cap B)\big) \vee \big((x \in A \cap C)\big\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

- sans raisonner directement avec les ensembles, par double inclusion.

  $\boxed{\subset}$ Soit x dans $A \cap (B \cup C)$. Alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$.

  — si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$, $\boxed{\text{donc } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.

  — si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$, $\boxed{\text{donc } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.

  d'où l'inclusion directe.

  $\boxed{\supset}$ soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

— si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B \subset B \cup C$, $\boxed{\text{donc } x \in A \cap (B \cup C).}$

— si $x \in A \cap C$, alors $x \in A$ et $x \in C \subset B \cup C$, $\boxed{\text{donc } x \in A \cap (B \cup C).}$

d'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

On fait de même pour les autres preuves, en utilisant notamment les lois de Morgan pour les propositions logiques. ■

Définition 66

Soient n un entier naturel non nul, $E_1, E_2, \dots E_n$ n ensembles. On définit le *produit cartésien* de $E_1, E_2, \dots E_n$ l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ et défini par

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \in E_i\}.$$

Dans le cas où $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = E^n$.

Exemple 67

- En particulier, on note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^2$ est le plan, $\mathbb{R}^3$ est l'espace ambiant.
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 68

1. Représenter $[-1, 1] \times \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \times [-1, 1]$.
2. Démontrer que le cercle unité $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$, n'est pas un produit cartésien.

Remarque 69

1. On peut, à l'aide d'un produit cartésien, déclarer d'un coup plusieurs objets : « Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ » .
2. Éviter cependant de déclarer trop de variables d'un coup, notamment si elles n'ont aucun lien entre elles : « Soit $(x, y, a, n, e) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{C}$ » est compliqué à lire.

Définition 70

Soit I et E deux ensembles. Une **famille d'éléments de E indexée sur I** est une collection d'éléments de E, notée $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$, telle que à chaque élément i de I il corresponde un élément de E.

 nlaillet.math@gmail.com

Remarque 71

Pourquoi cette définition à ce moment-là ? C'est parce que, si l'on veut définir formellement une famille d'éléments de E indexée sur I, on peut la définir comme une partie A du produit cartésien $\mathrm{I} \times E$, telle que :

$$\forall i \in \mathrm{I},\ \exists! e \in E,\ (i, e) \in A.$$

Définition 72 (Généralisation à plusieurs ensembles)

Soient I et E deux ensembles, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexées sur I. On définit

1. la réunion des $(A_i)_{i\in I}$ par
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E | \exists i \in I, (x \in A_i)\}.$$
2. l'intersection des $(A_i)_{i\in I}$ par
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E | \forall i \in I, (x \in A_i)\}.$$

Par convention, une intersection indexée sur $\emptyset$ est E tout entier, et une réunion indexée sur $\emptyset$ est $\emptyset$.

Exemple 73

Soit, pour tout entier naturel n, $A_n = [0, n]$. Déterminons $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

- Montrons par double inclusion que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$.

  $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. **Prenons** $n = 0$**.** Alors $x \in [0, 0] = \{0\}$.

  $\boxed{\supset}$ Comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \in [0, n]$, on en déduit que $0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

  D'où l'inclusion réciproque et l'égalité d'ensembles.
- De même, démontrons que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}_+$.

  $\boxed{\subset}$ Soit x dans $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors on dispose de n dans $\mathbb{N}$ tel que $x \in [0, n]$. Donc $x \geqslant 0$, donc $x \in \mathbb{R}_+$.

  $\boxed{\supset}$ Soit x dans $\mathbb{R}_+$.
  Soit $n = \lfloor x \rfloor + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Alors $x \in [0, n]$ donc $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

  D'où l'inclusion réciproque et, encore, l'égalité !

Proposition 74

Soient I et E deux ensembles, $A \in \mathscr{P}(E)$, $(F_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties de E indexée sur I.

1. $A \cap \left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} F_i\right) = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} (A \cap F_i)$
2. $A \cup \left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} F_i\right) = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} (A \cup F_i)$
3. (distributivité 1) $A \cap \left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} F_i\right) = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} (A \cap F_i)$
4. (distributivité 2) $A \cup \left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} F_i\right) = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} (A \cup F_i)$
5. (Loi de Morgan 1) $E \setminus \bigcup_{i\in\mathrm{I}} F_i = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} (E \setminus F_i)$
6. (Loi de Morgan 2) $E \setminus \bigcap_{i\in\mathrm{I}} F_i = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} (E \setminus F_i)$

Remarque 75

Attention aux raisonnements à base d'inclusion.

- il est vrai que $A \subset \bigcap_{i\in\mathrm{I}} F_i$ équivaut à $\forall i \in \mathrm{I}, A \subset F_i$.

  En revanche, il est faux de dire que $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} F_i \subset A$ équivaut à $\forall i \in \mathrm{I}, F_i \subset A$! Un contre-exemple, $F_x = [0, x]$. Alors $\bigcap_{x\in\mathbb{R}_+^*} F_x \subset \{0\}$ mais aucun des F_x n'est inclus dans le singleton $\{0\}$.
- de même, il est vrai que $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} F_i \subset A$ équivaut à $\forall i \in \mathrm{I},\ F_i \subset A$, mais on ne peut pas dire que $A \subset \bigcup_{i\in\mathrm{I}} F_i$ équivaut à $\forall i \in \mathrm{I},\ A \subset F_i$.

Exercice 76

Trouver un contre-exemple à la seconde remarque.

3 Raisonnements mathématiques

3.1 Questions d'unicité

Lorsqu'on veut déterminer un objet mathématique, on cherche souvent à déterminer s'il existe et/ou s'il est unique. Commençons avec l'unicité.

Point de méthode 77

Pour démontrer qu'au plus un élément vérifie une certaine propriété, deux possibilités déjà :

- son prend deux éléments x et y, on suppose qu'ils vérifient la propriété et on montre que $x = y$.
- si on connaît un élément vérifiant la propriété x_0, on prend x vérifiant la propriété et on montre que $x = x_0$.

Exemple 78

Soit E un ensemble. Déterminer qu'il existe au plus un $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\forall B \in \mathscr{P}(E)$, $A \cup B = B$.

- **Première méthode.** Soient A et A' vérifiant la propriété. Montrons que $A = A'$.
  Comme A vérifie la propriété, il la vérifie avec $B = A'$ donc $A \cup A' = A'$.
  Mais comme A' vérifie la propriété, il la vérifie avec $B = A$, donc $A' \cup A = A$.
  Donc, finalement, $\boxed{A = A' \cup A = A'}$.
- **Deuxième méthode.** On remarque que $\emptyset$ vérifie la propriété.
  Soit alors A vérifiant la propriété.
  En particulier, en prenant $B = \emptyset$, $A \cup \emptyset = \emptyset$, donc $A = \emptyset$. D'où l'unicité.

En fait, dans l'exemple précédent, si on n'a pas vu que $\emptyset$ fonctionnait, on pouvait le trouver, à l'aide d'un raisonnement par **analyse-synthèse.**

Point de méthode 79

(raisonnement par analyse-synthèse)
Pour chercher le ou les éléments vérifiant un certain prédicat $\mathcal{P}$, on procède en deux temps :

- **Analyse**. On écrit

  > Soit x tel que $\mathcal{P}(x)$.

  et, par implications successives, on détermine le plus précisément x.
  On trouve ainsi des **conditions nécessaires** pour que $\mathcal{P}(x)$.
  Si on tombe sur un seul élément, on a ainsi démontré l'unicité.
- **Synthèse.** On écrit, si on a trouvé un unique élément,

Posons $x = \dots$

ou bien, plus généralement, on prend x vérifiant les conditions nécessaires du dessus.

Exercice 80

Déterminer les x réels tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

Exemple 81

Un exemple à connaître.

Définition 82

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. on dit que f est paire si : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$,
2. on dit que f est impaire si : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Proposition 83

Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Démonstration

Démontrons-le par analyse-synthèse.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **Analyse.** Supposons qu'il existe (g, h) une fonction paire et une fonction impaire telles que $f = g + h$.
Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

- $f(x) = g(x) + h(x)$ par hypothèse.
- $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$,

car g est paire et h est impaire.
En additionnant les deux lignes, on obtient $f(x) + f(-x) = 2g(x)$, i.e.

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

et, en soustrayant les deux lignes, on obtient

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

D'où l'**unicité** de g et de h (elles sont exprimées uniquement en fonction des paramètres du problème !)
Synthèse. Posons, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} et h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Alors

- montrons que g est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x),$$
donc g est paire.
- montrons que h est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x),$$
donc h est impaire.
- finalement, montrons que $f = g + h$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

D'où l'**existence**, et le résultat. ■

3.2 Le raisonnement par disjonction de cas

Définition 84

Soit E un ensemble, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

1. $(F_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E si $E = \bigcup_{i\in I} F_i$,
2. $(F_i)_{i\in I}$ est une partition de E si
   (a) $\forall i \in I$, $F_i \neq \emptyset$,
   (b) $(F_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E,
   (c) $\forall (i,j) \in I^2$, $F_i \cap F_j = \emptyset$.

Exemple 85

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit $F_n = [n, n+1[$. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{R}_+$.
Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers pairs et $\mathbb{I}$ l'ensemble des entiers impairs. Alors $\{\mathbb{P}, \mathbb{I}\}$ est une partition de $\mathbb{N}$.

Proposition 86 (Principe du raisonnement par disjonction de cas)

Soit E un ensemble, n un entier naturel non nul, $(F_1, \ldots, F_n)$ un recouvrement de E. Soit $\mathcal{P}$ un prédicat défini sur E.
Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in F_i$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie,
Alors $\forall x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple 87

Montrons que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.
Soit n dans $\mathbb{N}$.

- **si** n est pair, alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
  Donc $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(k(2k+1))$, qui est pair.
- **si** n est impair, alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
  Donc $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2((2k+1)(k+1))$, donc $n(n+1)$ est pair.

Donc $n(n+1)$ est pair.

Exercice 88 (TD)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$\Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \subset \Big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\Big).$$

3.3 Le raisonnement par l'absurde

Point de méthode 89

Parfois, pour démontrer une implication, il peut être utile d'en démontrer la contraposée.

Exemple 90

Soient a et b deux réels. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, a \leqslant b + \varepsilon) \Rightarrow (a \leqslant b)$.

Correction

Démontrons la contraposée de l'implication.
On suppose que $a > b$, on montre que $\exists \varepsilon > 0,\ a > b + \varepsilon$.
Posons $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et

$$b + \varepsilon < b + 2\varepsilon = a,$$

d'où la contraposée et la proposition initiale.

Point de méthode 91

Le raisonnement par l'absurde consiste, pour montrer qu'une proposition $\mathcal{P}$ est vraie, à supposer qu'ele est fausse et à aboutir à une contradiction.

Exemple 92

1. Il existe une infinité de nombres premiers (cf. le chapitre d'arithmétique).
2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   Lemme. Pour tout entier naturel n, n et n^2 ont même parité.(preuve pour vous)
   Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On dispose alors de $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
   On peut de plus, quitte à diviser par le pgcd de p et q, supposer la fraction irréductible.
   Par hypothèse, $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, donc $2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair par le Lemme.
   On dispose alors de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.
   Donc $2q^2 = 4k^2$, i.e. $q^2 = 2k^2$.
   Donc, par le Lemme, q est pair, donc p et q ne sont pas premiers entre eux, **ABSURDE !**

Remarque 93

ATTENTION ! Souvent le raisonnement par l'absurde se résume à un raisonnement par contraposée. Lorsqu'on veut prouver $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, mais pas $\mathcal{Q}$ et on montre qu'alors $\mathcal{P}$ est fausse, d'où une « contradiction » qui n'en est pas une ! On a simplement montré que non($\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ non($\mathcal{P}$), c'est-à-dire la contraposée de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$!

Exercice 94

1. Montrer que la somme de deux rationnels est rationnelle.
2. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.
3. Que peut-on dire pour la somme de deux irrationnels ?

3.4 Raisonnements par récurrence

Il s'agit du grand classique de la Terminale... !

Proposition 95

Soit $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une proposition indexée sur les entiers naturels. Supposons que

1. $\mathcal{P}_0$ est vraie.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Alors pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Point de méthode 96

Rédiger clairement les démonstrations par récurrence, de cette manière :

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition suivante : ...

Initialisation : ... (montrer que $\mathcal{P}_0$ est vraie)

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, **tel que** $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$\vdots$

Conclusion : Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition est vraie pour tout entier naturel par le principe de récurrence.

Remarque 97

1. ATTENTION ! N'écrivez JAMAIS Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$. Cela n'a aucun sens ! !
2. Le principe de récurrence équivaut à la proposition : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Exemple 98

Montrons que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\mathcal{P}_n)$$

et démontrons cette proposition par récurrence.
Initialisation. $1 = \dfrac{1\times(1+1)}{2}$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}1+\cdots+n+(n+1) &= (1+\cdots+n)+(n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} \text{ par hypothèse de récurrence.}\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

d'où l'hérédité.
Conclusion. Héréditaire et vraie eu rang 1, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Proposition 99 (Récurrence double)

Soit $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne suite de propositions telle que

- $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n \wedge \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$.

Alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque 100

Il s'agit juste du principe de récurrence appliqué à $(\mathcal{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n = \mathcal{P}_n \wedge \mathcal{P}_{n+1}$.

Exemple 101

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n + 2u_{n+1}}{2}$.
Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.
Démontrons par récurrence double que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n \in [1,2]. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation. $u_0 = 1 \in [1,2]$, $u_1 = 2 \in [1,2]$, donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.
Alors $u_n \in [1,2]$ et $u_{n+1} \in [1,2]$. Donc $3 \leqslant u_n + 2u_{n+1} \leqslant 6$,

Donc $\frac{3}{3} \leqslant \frac{u_n + 2u_{n+1}}{3} \leqslant \frac{6}{3}$,
Donc $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$.
D'où l'hérédité.
Conclusion. Héréditaire et vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n par le principe de récurrence.

Proposition 102 (Récurrence forte)

Soit $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions telle que

- $\mathcal{P}_0$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Remarque 103

Il s'agit du principe de récurrence appliqué à $\mathcal{Q}_n$: $(\forall k \leqslant n,\ \mathcal{P}_n)$.

Exemple 104

Démontrons que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
On démontre par récurrence forte que pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$n \text{ admet un diviseur premier.} \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation. 2 est premier, donc 2 admet un diviseur premier.
Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$ sont vraies.
Notons $x = n + 1$.

- si x est premier, alors x est son propre diviseur premier,
- sinon, on dispose de $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$, tels que $x = ab$.
  Mais, par hypothèse de récurrence, a admet un diviseur premier p, donc x admet un diviseur premier.

D'où l'hérédité et le résultat par récurrence forte.

Un exemple pour conclure (à connaître aussi !)

Exemple 105

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $f(n + m) = f(n) + f(m)$.

Correction

Deux possibilités à mon avis :

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- Ou bien on voit que les fonctions linéaires $n \mapsto an$ (avec $a \in \mathbb{R}$) fonctionnent très bien.
  On a juste à montrer alors que toute fonction vérifiant la propriété est linéaire.
  Soit f vérifiant la propriété.
  Déjà, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$.
  Ensuite,

  ...au brouillon...

  On remarque que $f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, puis que $f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1)$, puis que...

  Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

  $$f(n) = nf(1) \qquad (\mathcal{P}_n)$$

  L'**initialisation** a déjà été faite.
  Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors

  $$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + f(1) \text{ car } f \text{ vérifie la propriété} \\ &= nf(1) + f(1) \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= (n+1)f(1). \end{aligned}$$

  D'où l'hérédité et le résultat par principe de récurrence.
  Donc f est une fonction linéaire !
- Ou bien on ne voit pas tout de suite quelles candidates fonctionnent. On fait alors une analyse-synthèse. L'analyse se fait alors à tâtons, on fait le même raisonnement que celui d'unicité fait précédemment, mais sans savoir où s'arrêter : c'est parfois la difficulté des analyses-synthèses.