DM 01
à rendre le lundi 09 septembre
Durée conseillée : 2h

Rappel. Le DM doit comporter votre nom, votre prénom, le temps passé, l'aide reçue/le travail en groupe. Je me réserve le droit de ne pas corriger le DM si l'une de ces informations vient à manquer. **Faites très attention à la rédaction, et n'oubliez pas de DÉCLARER VOS VARIABLES !**

Exercice 1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ s'il vérifie les trois propriétés suivantes :

a) $0 \in A$,

b) $\forall x \in A,\ -x \in A$.

c) $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ x + y \in A$.

1. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{N}$ n'est pas un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Démontrer que A est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ si et seulement si les deux propositions suivantes sont vérifiées :
   α) $A \neq \emptyset$,
   β) $\forall a \in A,\ \forall b \in A,\ a - b \in A$.
3. Démontrer que si A et B sont deux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, alors $A \cap B$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que si A est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus A$ n'est pas un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, et que $\forall x \in A,\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus A,\ x + y \in \mathbb{R} \setminus A$.
5. (Facultatif) Soit A un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ vérifiant : $1 \in A$ et $\forall x \in]0, 1[,\ x \notin A$. Démontrer que $A = \mathbb{Z}$.

Exercice 2. *Décomposition de* 1 *comme somme d'inverses d'entiers*. On s'intéresse à la proposition suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n,\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 \textbf{ et } a_1 < a_2 < \cdots < a_n. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

1. Pourquoi le résultat est-il évident sans l'hypothèse « $a_1 < \cdots < a_n$ » ?
2. Étudier $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$.
3. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
4. Démontrer que pour $n = 3$, il y a unicité d'une telle écriture. Y a-t-il unicité pour $n = 4$?