# TD 1
# Logique et raisonnement

## 1 Exercices corrigés en classe

**Exercice 1.** ●●○ Traduire à l'aide de quantificateurs ce qu'on veut démontrer. Quelles variables déclareriez-vous pour faire la démonstration ? *On ne demande pas la démonstration.*

1. Démontrer que si $n$ est un entier naturel, alors $n$ est la somme de quatre carrés d'entiers.
2. Démontrer que tout réel $x$ admet un entier relatif $y$ qui lui est inférieur.
3. Soit $N$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout $i$ dans $\{2, \dots, N\}$, montrer l'inégalité $\int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t} dt$, puis démontrer que $\left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N)\right| \leqslant C$, où $C$ est une constante indépendante de $N$.

**Exercice 2.** *(mauvaises) rédactions d'élèves*. Observer à chaque fois la question posée et la réponse donnée. Il y a quelque chose qui ne va pas : ou bien sur le fond (problème de logique), ou bien sur la forme (manière de rédiger le raisonnement), ou bien sur les deux. Proposer une correction.

1. **Question.** Soit $A$ un ensemble de réels qui possède un élément $x_0$ et qui vérifie la propriété :
$$\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ x - y \in A.$$
Montrer que : $\forall (x, y) \in A^2,\ x + y \in A$.
**Réponse.** Si $A = \mathbb{R}$, par exemple, alors pour tout $x$ et pour tout $y$ dans $\mathbb{R}$, $x - y$ est dans $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $x + y \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.
2. **Question.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : soit $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + a)$ soit $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + a)$. Étudier la réciproque.
**Réponse.** Comme $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, alors
   - ou bien $f(x) - f(y) = x - y \Leftrightarrow f(x) = x + f(y) - y = x + a$ avec $a = f(y) - y$,
   - ou bien $f(x) - f(y) = y - x \Leftrightarrow f(x) = -x + f(y) + y = -x + a$ avec $a = f(y) + y$.

   D'où le résultat.
3. **Question.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, il existe un unique couple $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $m$ est impair et $n = 2^k m$.
**Réponse.** Si $n$ est impair, c'est gagné, on prend $k = 0$. Sinon on divise $n$ par 2 et si le résultat est impair, $n = 2 \times \frac{n}{2}$. Sinon on recommence, jusqu'à tomber forcément sur un nombre impair. Si $k$ est le nombre d'étapes, on a $n = 2^k m$.

**Exercice 3.** *Quelques exemples fonctionnels*. ●●◐

1. Déterminer une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0,\ f(x) > \alpha$, mais qui ne satisfasse pas $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > \alpha$.
2. Déterminer une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in ]0, \varepsilon], \exists y \in ]0, \varepsilon], f(x) = -1 \text{ et } f(y) = 1.$$

**Exercice 4.** ○○○ Soit $E = \{a, b, c\}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

**1.**$a \in E$ **2.**$a \in \mathcal{P}(E)$ **3.**$\{a\} \in \mathcal{P}(E)$ **4.**$(a, b) \subset E$ **5.**$(a, b) \in E$ **6.**$\emptyset \subset E$.

**Exercice 5.** *Différence symétrique*. ●●○ Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$, on appelle différence symétrique de $A$ et $B$, l'ensemble $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

**Exercice 6.** ●●◐ Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ dans $\mathcal{P}(E)$.

1. On suppose qu'il existe un ensemble $X$ tel que $(A \cup X) \subset (B \cup X)$ et $(A \cap X) \subset (B \cap X)$ . Montrer que $A \subset B$.
2. On suppose qu'il existe $X$ tel que $(A \cup X) = (B \cup X)$ et $(A \cap X) = (B \cap X)$. Que peut-on en déduire sur $A$ et $B$ ?
3. On suppose que $A \subset B$. Résoudre l'équation $A \cap X = B \cap X$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

**Exercice 7.** ●◐○ Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction constante et d'une fonction s'annulant en zéro.

**Exercice 8.** *Somme de deux ensembles*. Si $A$ et $B$ sont deux parties de $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble $A + B$ par $A + B = \{x + y | x \in A, \ y \in B\}$.

1. Montrer que pour toute partie $A$ non vide de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} + A = \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour toutes parties $A$, $B$ et $C$ de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$, on a $A + C \subset B + C$.
3. Somme de deux segments.
   (a) Déterminer $[-1, 1] + [-1, 1]$.
   (b) (cas général) Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre réels. On veut déterminer $[a, b] + [c, d]$.
   - Montrer que $[a, b] + [c, d] \subset [a + c, b + d]$.
   - Soit $x$ dans $[a + c, b + d]$. En distinguant les cas $x - a \in [c, d]$ et « $x - a \notin [c, d]$ » , démontrer que $x \in [a, b] + [c, d]$ et conclure.

**Stratégie pour ce TD.** Il faut que vous manipuliez les trois points importants de ce chapitre : propositions logiques, ensembles, méthodes de démonstration.

- commencez par de petits exercices sur les propositions : 9, 10, 11.
- faire quelques exercices sur les ensembles : un sur la description des parties d'un ensemble (14), et un plus délicat mais intéressant (15)
- faire ensuite quelques raisonnements typiques : 21, 24, 29.

# 2 Propositions, logique, quantificateurs

**Exercice 9.** ●○○ Pour chaque couple de propositions, expliciter en français la différence entre les deux.

1. (dans cette question, on précisera quel énoncé est vrai et lequel est faux)
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \ n \leqslant N$.
   (b) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ n \leqslant N$.
2. (dans cette question, on dira quelles sont les $f$ qui vérifient le premier énoncé, et quelles sont celles qui vérifient le second) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$.
(b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$.

**Exercice 10.** ●◐○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Exprimer avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule.
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

**Exercice 11.** ●◐○ Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur $I$. Exprimer les négations des assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \neq 0$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathrm{I}, f(x) = y$
3. $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
4. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{I}, f(x) \leqslant M$

**Exercice 12.** ●●◐ Nier les énoncés suivants.

1. $\forall x \in A,\ \exists y \in B, (x \in C$ et $(x, y) \in D)$ ou $x \notin C$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ ((x, y) \in A \Rightarrow x \in B)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ (x, y) \in A) \Rightarrow x \in B$.

Expliquer la différence entre les deux dernières phrases.

**Exercice 13.** *Quelques exemples fonctionnels*. ●●○ Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Traduire « $f$ n'est pas identiquement nulle ».
2. On dit que $f$ vérifie
   - la propriété $\mathscr{C}$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   - la propriété $\mathscr{UC}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

   (a) Démontrer que $\mathscr{UC} \Rightarrow \mathscr{C}$.
   (b) Démontrer que $x \mapsto 2x$ vérifie $\mathscr{UC}$.
   (c) Démontrer que $x \mapsto x^2$ vérifie $\mathscr{C}$ mais pas $\mathscr{UC}$.

# 3 Ensembles

**Exercice 14.** ◐○○ Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où $a$ désigne un élément.

**Exercice 15.** ●●○ Soient $a$, $b$ deux réels tels que $b - a > 2$.

1. Déterminer
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

**2.** Déterminer
$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right[.$$

**Exercice 16.** Soient $E$ un ensemble, $A$, $B$ et $C$ trois parties de $E$. Montrer les propositions suivantes :

**1.** $(A \cup B = E) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset A)$ (où $\overline{B}$ désigne le complémentaire de $B$ dans $E$)

**2.** $\big((A \cup B \subset A \cup C)$ et $(A \cap B \subset A \cap C)\big) \Rightarrow (B \subset C)$

**Exercice 17.** ●●◐ Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ des sous-ensembles de $E$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$ :

**1.** $A \cap X = B$.

**2.** $A \cup X = B$.

**Exercice 18.** ●●○ Démontrer que la partie $A$ de $\mathbb{R}^2$ définie par $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas un produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

**Exercice 19.** ●●◐ Soit $E$ un ensemble, éventuellement vide, dont les éléments sont des ensembles. On dit que $E$ est **transitif** si
$$\forall x \in E,\ x \subset E.$$

**1.** Si $E = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, a-t-on $\{1\} \in E$ ? A-t-on $\{1\} \subset E$ ? $E$ est-il alors transitif ?

**2.** Les ensembles suivants sont-ils transitifs ?
$$A = \emptyset,\ B = \{\emptyset\},\ C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

**3.** Soit $X$ un ensemble quelconque. On définit la suite d'ensembles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence ainsi : $X_0 = X$ et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = \mathcal{P}(X_n).$$

(a) Si $X = \emptyset$, déterminer $X_0, X_1, X_2, X_3$.

(b) Si $X = \{1, 3\}$, déterminer $X_2$.

(c) Montrer que si $X$ est transitif, alors pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $X_n$ est transitif.

**4.** Montrer que si $Y$ est un un ensemble transitif, $Y \cup \{Y\}$ est transitif.

Si $X$ est un ensemble, $X$ est dit héréditairement transitif si tout élément de $X \cup \{X\}$ est transitif.

**5.** Montrer que tout élément d'un ensemble héréditairement transitif est héréditairement transitif.

**6.** Si on définit $A_0 = \emptyset$ et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$, démontrer que l'ensemble
$$N = \{A_k,\ k \in \mathbb{N}\}$$
est héréditairement transitif.
*Point culture :* on vient de construire les entiers naturels à la manière de von Neumann. On a même construit ce que l'on appelle le premier **ordinal**. Mais ceci doit attendre le chapitre 5 pour être prolongé !

# 4 Quelques raisonnements typiques

**Exercice 20.** ●○○

1. Soit $p$ un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.
2. ●●◐ (ne pas faire si vous n'avez pas fait spé maths) Un entier naturel $n$ est un carré parfait si : $\exists m \in \mathbb{N},\ n = m^2$.
   Soit $n$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que si $n$ n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

**Exercice 21.** ●○○ Soient $a$ et $b$ deux réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x < a \Rightarrow x \leqslant b$.
Démontrer que $a \leqslant b$.

**Exercice 22.** *Densité des irationnels dans les réels*. ●●○ On rappelle que les rationnels sont les éléments de $\mathbb{Q}$ et les irationnels sont les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer que la somme de deux rationnels est rationnelle.
2. Montrer que pour tout $x$ dans $\mathbb{Q}$, pour tout $y$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Montrer que pour tout $y$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{y}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Si $A \subset \mathbb{R}$, on dit que $A$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si elle vérifie la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ |x - y| \leqslant \varepsilon.$$

4. (Bonus) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   *On déclarera proprement les variables, et on fera une disjonction de cas selon que le réel déclaré $x$ appartient à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{Q}$.*

**Exercice 23.** ●○○ On montre par récurrence que quelle que soit la trousse, tous les stylos de cette trousse sont de même couleur.
**Initialisation.** Soit une trousse à un seul stylo. La proposition est évidente.
**Hérédité.** Supposons que toute trousse de $n$ stylos ait tous ses stylos de même couleur. Soit une trousse de $n + 1$ stylos. Retirons un stylo à cette trousse. Les $n$ restants sont de même couleur. Remettons ce stylo et prenons-en un autre. Les $n$ restants sont aussi de même couleur, donc tous les stylos sont de même couleur.
Héréditaire et vraie au rang 1, la proposition est donc vraie pour tout entier $n$ : toute trousse a donc ses stylos de même couleur !
**Où est l'erreur ?**

**Exercice 24.** ●○○ Déterminer une expression explicite du terme général des suites suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2(n+1)u_n \end{cases}$$

2. la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) v_n \end{cases}$$

**Exercice 25.** ●○○ On considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n - t_n^2$. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant t_n \leqslant 1$.

**Exercice 26.** *Une drôle de disjonction de cas – puissances de rationnels*. ●●○ On considère le réel $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

1. Que vaut $x^{\sqrt{2}}$ ?
2. En déduire qu'on peut trouver deux nombres irrationnels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha^\beta$ est rationnel.

**Exercice 27.** *Autour des nombres de Fibonacci*. ●●○ On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les 6 premiers termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
3. Montrer que pour tous $p$ dans $\mathbb{N}^*$ et $q$ dans $\mathbb{N}$, $F_pF_{q+1} + F_{p-1}F_q = F_{p+q}$.
   *On pourra procéder par récurrence sur $p$ ou sur $q$.*
4. Si $a$ et $b$ sont deux entiers naturels, on dit que $a$ divise $b$ s'il existe $k$ dans $\mathbb{N}$ tel que $b = ka$. Montrer que pour tout $p$ dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $F_p$ divise $F_{kp}$.
5. (Formule de Binet)
   (a) Résoudre l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$. On note $\varphi$ la solution strictement supérieure à 1 : montrer que l'autre solution de l'équation, que l'on notera $\varphi'$, vérifie $\varphi' = -\dfrac{1}{\varphi}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)$.

**Exercice 28.** ●●○

1. Déterminer le signe de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 2$.
2. Déterminer l'ensemble des réels $x$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + 2x^n$.
3. Déterminer l'ensemble des réels $x$ tels que : $\exists n \in \mathbb{N},\ x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + 2x^n$.

**Exercice 29.** ●◐○ Déterminer par analyse-synthèse toutes les fonctions $f$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m + n) = f(m)f(n).$$

**Exercice 30.** ●●○ On veut déterminer toutes les fonctions $f$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n + 1) \geqslant f(f(n)) + 1.$$

**Analyse**

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant n \Rightarrow f(m) \geqslant n$. *On pourra faire une récurrence sur l'une des deux variables.*
2. En déduire que $f$ est strictement croissante.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $f(n) < n + 1$ et conclure l'analyse.

**Synthèse**

4. Effectuer la synthèse du problème.

**Exercice 31.** Déterminer par analyse-synthèse l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

**Exercice 32.** ●●◐ Soit $x$ un nombre réel tel que $x + \frac{1}{x}$ est un entier relatif. Montrer que pour tout entier $n$,

$$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

**Exercice 33.** ●●● Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. le principe de récurrence
2. toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

**Indications**

1
   1. Penser qu'il y a un $\forall$ au début.
   2. Le $\forall$ est évident ici, c'est le $\exists$ qui est caché.
   3. Piège, il y a deux propositions à formuler, la deuxième commence par « $\exists C$ »

3
   1. Penser que la première proposition n'est pas très contraignante...
   2. Penser à une fonction qui oscille **beaucoup**.

4 Penser à trois éléments importants : l'**appartenance** d'un **élément** à un **ensemble**, l'**inclusion** d'une **partie** dans un **ensemble**, et les **produits cartésiens**.

5 **Commencer par faire un dessin**, puis raisonner par double inclusion.

6
   1. Prendre un élément de $A$ et dire qu'il appartient à $A \cup X$. Faire ensuite une disjonction de cas.
   2. 
   3. Faire des dessins pour avoir l'idée, et raisonner par analyse-synthèse.

7 Faire une analyse-synthèse.

9 Penser qu'un « $\exists, \dots \forall$ » est beaucoup plus restrictif qu'un « $\forall, \dots, \exists$ ».

10 Attention ! « décroissante » , « positive » , etc. **incluent** le cas d'égalité en français.

11 Attention à
   — la négation d'un $\forall$ en $\exists$ et réciproquement,
   — la négation d'une application.

12 Pour comparer les énoncés, les exprimer sans implication. Et montrer que $\mathcal{Q}$ implique $\mathcal{P}$, mais pas l'inverse (en général).

13
   1. Penser que « être identiquement nulle » signifie « être nulle pour tous les réels » .
   2. (a) La première question a été faite en cours.
      (b) Exprimer $\eta$ **très simplement** en fonction de $\varepsilon$.
      (c) Nier proprement la propriété $\mathscr{UC}$.

14 Commencer par décrire en extension $\mathcal{P}(\{a\})$.

15 **ATTENTION !** La notion de « limite d'ensembles » n'existe pas.

1. Démontrer par double inclusion qu'il s'agit de $]a, b[$.
2. Démontrer par double inclusion qu'il s'agit de $]a, b[$.

16 Là, c'est davantage un exercice de **rédaction** qu'un vrai exercice de raisonnement. Écrivez ce que vous savez, demandez-vous où vous voulez aller, et déclarez proprement les choses !

17
1. Faire des dessins et démontrer que si on n'a pas $B \subset A$, il n'y a pas de solution.
2. Faire des dessins et trouver une condition nécessaire pour qu'il existe une solution.

18 Raisonner par l'absurde en supposant que $A = B \times C$ avec $B \subset \mathbb{R}$ ou $C \subset \mathbb{R}$.

19
1. C'est de la vérification de vocabulaire : ne pas confondre $\in$ et $\subset$.
2. Pensez au fait que toute proposition universelle est vraie sur $\emptyset$. Penser aussi au fait que $\emptyset$ est inclus dans n'importe quel ensemble.
3. (a)
   (b)
   (c) Faire une récurrence. Pour l'hérédité, prendre $x$ dans $X_{n+1}$, et considérer les éléments de $x$ : quelle propriété vérifient-ils ?
4. Disjoindre les cas, selon que $x \in Y$ ou $x \in \{Y\}$.
5. Disjoindre les cas.
6. Montrer par récurrence que chacun des $A_k$ est transitif.

20
1. Faire le même raisonnement que $\sqrt{2}$ en cours.
2. Utiliser la décomposition en facteurs premiers, et des théorèmes d'arithmétique.

21 Faire un raisonnement par l'absurde ou par contraposée.

22
1. Juste déclarer proprement ses variables !
2. Faire un raisonnement par l'absurde (ou par contraposée, si vous trouvez bien la contraposée)
3. Faire pareil !
4. Penser que quel que soit $n$, $\dfrac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

23 Regarder l'hérédité pour le passage de 1 à 2 stylos.

24 **Toujours** commencer par calculer les 2 ou 3 premiers termes de la suite, puis intuiter l'expression du terme général, puis faire une démonstration par récurrence.

25 Une récurrence suffit !

26
1. Penser que $a^b = \mathrm{e}^{b \ln(a)}$ (c'est une formule **très importante**)
2. Disjoindre les cas « $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ » et $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

27
1. C'est du calcul pur.
2. Faire une récurrence, ou remarquer une simplification dans la somme (dans le chapitre 2, on parlera de « télescopage »)
3. Si vous faites une récurrence sur $p$, attention ! La proposition doit commencer par « pour tout $q$... »

**4.** Faire une récurrence sur $k$

**5.** Faire une récurrence double !

28 **1.** C'est une question de première S, il suffit d'étudier le trinôme du second degré.

**2.** Faire une analyse-synthèse, prendre $n = 0$ puis $n = 1$.

**3.** S'intéresser à la négation de la proposition.

29 Faire une analyse-synthèse très proche de la question de cours.

30 **1.** Faire une récurrence sur $n$.

**2.** Démontrer que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $f(n+1) > f(n)$.

**3.** Remarquer que si $f$ est une fonction croissante, alors pour tous $x$ et $y$, $f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x > y$.

**4.**

31 — Remarquer que $f(0) = 0$ ou 1 mais que $f(0) = 0$ est impossible.

— Montrer que pour tout $x$, $f(x) = x + 1$.

32 Faire une récurrence **double** ou **forte**, en pensant

— ou bien à développer $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$,

— ou bien à calculer $\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) \times \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

33 Dans un sens, considérer l'ensemble des $n$ tels que la proposition ne fonctionne pas, et prendre son plus petit élément ; dans l'autre, démontrer ce résultat par récurrence sur $n$ : « Pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$ contenant $n$, $A$ possède un plus petit élément. »