TD 2
Calculs

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ◐○○ Calculer les sommes et produits suivants :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(n-k),\ T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}},\ U_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right).$$

Correction

Il suffit de bien séparer les sommes por se ramener à des sommes connues :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} k^2(n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} nk^2 - k^3 \\
&= n\sum_{k=1}^{n} k^2(-\sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)}{12}\left(2(2n+1) - 3(n+1)\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)(n-1)}{12}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{4^{k+1}} - \frac{3^k}{4^{k+1}} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1-\frac{3^n}{4^n}}{1-\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3^n}{4^n}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}}.
\end{aligned}$$

 nlaillet.math@gmail.com

Pour U_n, on remarque que

$$1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}=\frac{k^2+2k+1}{k^2}=\frac{(k+1)^2}{k^2}.$$

Donc, par télescopage

$$U_n=(n+1)^2.$$

Exercice 2. ●●○ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer : $A_n=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$ et $B_n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{i}{j}$.

Correction

Pour la première somme, on écrit la somme double et on la sépare en trois :

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\max(i,j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}\max(i,j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\max(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}i+\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}j\\
&= \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}i+\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}j\\
&= 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}i+\sum_{i=1}^{n}i\\
&= 2\sum_{i=2}^{n}i^2-i+\sum_{i=1}^{n}i\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}i^2-i+\sum_{i=1}^{n}i\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}i^2=2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième somme, on met à l'intérieur la somme sur i :

$$B_n=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i}{j}=\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1}i=\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\frac{(j-1)j}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}j-1=\frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2}=n(n-1).$$

Exercice 3. ●●○ Calculer

$$S_n=\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij,\ T_n=\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}ij,\ U_n=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}ij,\ V_n=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}ij,\ W_n=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}ij,\ X_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}ij.$$

Correction

On calcule S_n, en l'écrivant comme un produit double :

$$\begin{aligned} S_n &= \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij \\ &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ij \\ &= \prod_{i=1}^{n} i^n \prod_{j=1}^{n} j \text{ car } i \text{ est une constante dans le produit interne sur } j. \\ &= \prod_{i=1}^{n}(i^n n!) \\ &= (n!)^n \prod_{i=1}^{n} i^n \\ &= (n!)^n \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n \\ &= (n!)^n (n!)^n = (n!)^{2n}. \end{aligned}$$

Pour calculer T_n, on peut faire les dessins comme en TD ou bien remarquer que

$$T_n = \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} ij = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i=j}} ij} = \frac{S_n}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i^2} = \frac{S_n}{n!^2} = (n!)^{2n-2}.$$

Ensuite, on remarque plusieurs choses : si l'on appelle $D_n = \displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i=j}} ij$, on a $U_n = W_n \times D_n$ (on sépare le produit pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ en le produit pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ fois le produit pour $1 \leqslant i = j \leqslant n$). Ensuite, comme les variables sont muettes et que l'expression ij est symétrique en i et en j,

$$U_n = \prod_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant n} ab = \prod_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant n} ba = \prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij = V_n,$$

et, de même, $W_n = X_n$. Enfin, $T_n = W_n \times X_n = W_n^2$, donc $W_n = \sqrt{T_n} = \sqrt{(n!)^{2n-2}} = (n!)^{n-1}$, donc $U_n = (n!)^{n-1} \times (n!)^2 = (n!)^{n+1}$, et, de même, $V_n = (n!)^{n+1}$.

Exercice 4. ●○○ Calculer les sommes suivantes

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}, \quad S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \text{ [avec } p \leqslant n]$$

Correction

On propose deux méthodes :

- On utilise $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, i.e.

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $\ell = k-1$. Quand $k=1$, $\ell = 0$, et quand $k=n$, $\ell = n-1$. Donc

$$R_n = n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell} = n2^{n-1},$$

par la formule de la somme des coefficients binomiaux (cf. cours). De même, on écrit que

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} kn\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}$$

On effectue le changement de variables $\ell = k-1$. Quand $k=1$, $\ell = 0$, et quand $k=n$, $\ell = n-1$. Donc

$$\begin{aligned} T_n &= n\sum_{\ell=0}^{n}(\ell+1)\binom{n-1}{\ell} \\ &= n\sum_{\ell=0}^{n}\ell\binom{n-1}{\ell} + n\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n-1}{\ell} \\ &= n\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell\binom{n-1}{\ell} + n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell} \text{ (on a éliminé les termes nuls)} \\ &= n\sum_{\ell=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{\ell-1} + n2^{n-1} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}. \end{aligned}$$

- Autre méthode : posons $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Alors $f' : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$. Alors $R_n = f'(1)$. Or, $f : x \mapsto (x+1)^n$, donc $f' : x \mapsto n(x+1)^{n-1}$, donc $R_n = f'(1) = n2^{n-1}$. Ensuite pour T_n, il faut remarquer que pour tout x

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2x^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} kx^{k-2},$$

donc $f''(1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k$, i.e. $n(n-1)2^{n-2} = T_n - S_n$, d'où T_n !

Pour $S_{n,p}$, en regardant quelques exemples, on conjecture que $S_{n,p} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$. On peut le démontrer par récurrence, mais on va proposer une méthode plus rapide : soient n dans $\mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
S_{n,p} &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{p} -(-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{p} -a_{k-1} + a_k,
\end{aligned}$$

où $a_k = (-1)^k \binom{n-1}{k}$, donc, par télescopage, $S_{n,p} = a_p - a_{-1} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$.

Exercice 5. ●◐○ Discuter, en fonction de la valeur des paramètres λ et μ, des solutions réelles du système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda x - \mu y = 0 \\ \mu x + \lambda y = \mu \end{cases}$$

Correction

Soient (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda x - \mu y = 0 \\ \mu x + \lambda y = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ (\lambda - \mu) y = -\lambda & L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ (\mu + \lambda) y = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - \mu L_1 \end{cases}$$

- Si $\lambda + \mu = 0$, alors $\mu = -\lambda$, et le système s'écrit

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2\lambda y = -\lambda \end{cases}$$

  Donc,
  — Si $\lambda = 0$, le système devient $x - y = 1$, qui possède une infinité de solutions : en posant $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on obtient comme ensemble de solutions

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

— Si $\lambda \neq 0$, la deuxième équation donne $y = -\frac{1}{2}$, donc $x = \frac{1}{2}$, d'où une unique solution, $(1/2, 1/2)$.

• Si $\lambda + \mu \neq 0$, alors le système devient $\begin{cases} x - y = 1 \\ (\lambda-\mu)y = -\lambda \\ y = 0 \end{cases}$, i.e., en faisant $L_2 \leftrightarrow L_3$, $\begin{cases} x - y = 1 \\ y = 0 \\ (\lambda-\mu)y = -\lambda \end{cases}$, d'où, en faiant $L_3 \leftarrow (\lambda-\mu)L_2$,

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y = 0 \\ 0 = -\lambda \end{cases}$$

— si $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution.

— Sinon l y a une unique solution, $x = 1$ et $y = 0$.

Exercice 6. ●○○ Soient x et y deux réels positifs.

1. (Une inégalité triangulaire) Montrer que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Correction

Comme $\sqrt{x+y}$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sont deux quantités positives, l'inégalité à démontrer est équivalente à

$$x + y \leqslant x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Comme $2\sqrt{x}\sqrt{y} \geqslant 0$, l'égalité est démontrée.

2. En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Correction

Supposons $x \geqslant y$. Alors $\sqrt{x} = \sqrt{y + x - y} \leqslant \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$, donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$, i.e. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.
Supposons $x \leqslant y$. Alors $\sqrt{y} = \sqrt{x + y - x} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y-x}$, donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$, i.e. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

3. (Inégalité arithmético-géométrique) Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

Correction

Prenons le carré des deux côtés de l'inégalité (les deux quantités sont positives) : l'équation est équivalente à

$$xy \leqslant \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4},$$

i.e. à

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - xy \geqslant 0.$$

Or,

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{4}-xy=\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4}=\frac{x^2-2xy+y^2}{4}=\frac{(x-y)^2}{4}\geqslant 0.$$

L'inégalité est donc démontrée.

Exercice 7. ●◐○ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i| \text{ et } \|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|.$$

Démontrer que pour tous $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x+y\|_1\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1 \text{ et } \|x+y\|_\infty\leqslant\|x\|_\infty+\|y\|_\infty.$$

Correction

Soient $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1&=\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|\\&\leqslant\sum_{i=1}^n|x_i|+|y_i| \text{ par l'inégalité triangulaire}\\&=\sum_{i=1}^n|x_i|+\sum_{i=1}^n|y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1.\end{aligned}$$

Notons ensuite $z=x+y=(z_1,\dots,z_n)$. Soit k tel que $|z_k|=\|z\|_\infty$. Alors

$$\|z\|_\infty=|z_k|=|x_k+y_k|\leqslant|x_k|+|y_k|\leqslant\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$$

Exercice 8. ●●○ Soit $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $S_n=\prod_{k=0}^n\cos(2^k\theta)$. En considérant $\sin(\theta)S_n$, calculer S_n.

Correction

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Faisons le calcul (sans récurrence).

$$\begin{aligned}
\sin(\theta)S_n &= \sin(\theta) \times \cos(\theta) \times \cos(2\theta) \times \cos(4\theta) \times \cdots \times \cos(2^n\theta) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos(2\theta) \times \cos(4\theta) \cdots \times \cos(2^n\theta) \\
&= \frac{1}{4}\sin(4\theta)\cos(4\theta)\dots\cos(2^n\theta) \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1}\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi,

- si $\sin(\theta) = 0$, alors $\theta = 0[\pi]$ donc $S_n = \cos(\theta)$ (tous les autres $\cos(2^k\theta)$ valent 1).
- sinon, $S_n = \dfrac{\sin(2^{n+1}\theta)}{2^{n+1}\sin(\theta)}$.

Stratégie de résolution. Pour ce TD, il faut insister sur 3 points :

- le plus important, les calculs de sommes/coefficients binomiaux/etc. Faire en priorité l'exercice 9, 12, 15. Ensuite, regarder d'autres exercices comme le 14 (**très bon exercice de révision de différentes méthodes**), 13, 17 et 18.
- pour les systèmes linéaires, vérifiez rapidement que vous savez faire des systèmes de base (si ce n'est pas le cas, faites 21 et 22). Faites 23 si vous avez mal compris le principe des paramètres. **Ne pas y passer trop de temps**.
- faire un peu d'inégalités sur les réels, notamment 25 et 27.

2 Sommes et produits

Exercice 9. ●○○ Calculer au moyen d'un télescopage les sommes suivantes pour tout entier n non nul

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Correction

Une simple petite transformation apporte directement un télescopage :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$

Correction

On remarque que

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1)k! \text{ « coup du 1 »} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! \\ &= (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

 nlaillet.math@gmail.com

3. (●●○)$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Correction

Pour la dernière somme, on cherche trois réels a, b, c tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1, 0\}, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

On peut tout mettre au même dénominateur mais je vous dévoile dès maintenant la technique que vous verrez en janvier : multiplions l'égalité précédente par k et évaluons en 0 : la multiplication par k donne $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \frac{kb}{k+1} + \frac{kc}{k+2}$. Maintenant, en évaluant en 0, on obtient $\frac{1}{2} = a$. De même, en multipliant par $k+1$ et en évaluant en -1, on trouve $b = -1$. Enfin, en multipliant par $k+2$ et en évaluant en -2, on trouve $c = -\frac{1}{2}$, d'où, pour tout k dans $\mathbb{Z} \setminus \{-2, -1, 0\}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)} \\ &= u_k - u_{k+1},\end{aligned}$$

si l'on pose $u_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2k(k+1)}$, d'où

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k+1} = u_1 - u_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 10. *Divergence de la série harmonique*. ●○○

1. Montrer que pour tout entier n,

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Correction

On démontre le résultat par récurrence sur n (la proposition est $\mathcal{P}_n : \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$).

Initialisation. pour $n = 0$, la some de gauche est égale à 1, et donc supérieure à 0.

Hérédité. on suppose la proposition vraie au rang n. Alors

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}.$$

Or, $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$ par hypothèse de récurrence. Enuite, $\forall k \in [\![2^n + 1, 2^{n+1}]\!]$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, donc

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2},$$

d'où l'hérédité, et la propriété par le principe de récurrence.

2. Qu'en déduire sur la convergence de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$?

On admet qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Correction

On en déduit que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_{2^n} \geqslant \dfrac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Comme (S_n) est croissante, on en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 11. ●◐○ En regroupant judicieusement les termes, calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$$

pour tout entier non nul n.

Correction

On va regrouper les termes 2 par 2, en écrivant

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k = \sum_{p=0}^{n}(-1)^{2p+2}(2p+2)+(-1)^{2p+1}(2p+1) = \sum_{p=0}^{n}(2p+2)-(2p+1) = \sum_{p=0}^{n} 1 = n+1.$$

Exercice 12. ●◐○ Calculer les sommes suivantes

1. $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$

Correction

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} ij \\
&= \sum_{j=2}^{n} j \sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= \sum_{j=2}^{n} j \frac{j(j-1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \frac{j(j-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^3 - j^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n(n+1) - 2(2n+1)\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n^2 + 3n - 4n - 2\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{24} \left(3n^2 + 3n - 4n - 2\right) \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.
\end{aligned}$$

2. $U_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i)$ [avec $n > 1$]

Correction

Pour U_n, on va proposer deux méthodes !

Première méthode : séparer la somme en deux.

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} j - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)(i+1+n)}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)(n+1-i)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(n(n+1)-(2n+1)i+i^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(n(n+1)(n-1)-(2n+1)\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\left(n+1-\frac{2n+1}{2}+\frac{2n-1}{6}\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\frac{6n+6-6n-3+2n-1}{6} \\
&= \frac{n(n-1)(2n+2)}{12} \\
&= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : par un changement d'indices.

$$U_n = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i).$$

Posons $l=j-i$. Alors quand $j=i+1$, $l=1$, quand $j=n$, $l=n-i$. Donc

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-i} l \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-i+1)(n-i)}{2}.
\end{aligned}$$

Posons $k=n-i$. Quand $i=1$, $k=n-1$. Quand $i=n-1$, $k=1$. Donc

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)k}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\frac{2n+2}{6} \\
&= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 13. *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* ●●○ Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

On note

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ \ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ \ C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit alors x un réel. Développer $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2$ et l'écrire en fonction de A, B et C.

Correction

On développe l'expression

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 x^2 + 2a_k x b_k + b_k^2 \\ &= x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= \boxed{Ax^2 + 2Cx + B}. \end{aligned}$$

2. Déduire de l'étude du signe de la fonction f l'inégalité désirée.

Correction

Par définition, la fonction f étant une somme de carrés, elle est positive ou nulle sur tout $\mathbb{R}$. Mais on a vu en question précédente que f était une fonction polynomiale du second degré, donc $\boxed{\text{son discriminant est négatif}}$, i.e.

$$(2C)^2 - 4AB \leqslant 0,$$

i.e. $\boxed{C^2 \leqslant AB}$, d'où le résultat désiré !

3. Soient a_1, a_2,..., a_n une suite de réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

Correction

C'était une question bien plus délicate ! On remarque que

$$\begin{aligned}
n^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{a_k})^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right) \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !

Exercice 14. ●●○ On se propose de calculer de trois manières différentes (dont deux vues en cours : ce sont des révisions !) la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ (où $n \in \mathbb{N}$).

1. (calcul direct) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k$ et en déduire la valeur de S_n.

Correction

Remarquons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k$. car 2^k est constante dans la seconde somme. Donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2^i\frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2^i(2^{n-i+1}-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(2^{n+1}-2^i) \\
&= n2^{n+1} - 2\frac{2^n-1}{2-1} \\
&= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2.
\end{aligned}$$

2. (transformation d'Abel) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On pose

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \ \ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

(a) Déterminer a_n et b_n en fonction de A_n, A_{n-1}, B_n et B_{n-1}.

Correction

On remarque que $a_n = A_n - A_{n-1}$ et que $b_n = B_n - B_{n-1}$.

(b) Montrer la formule suivante, appelée formule d'intégration par parties discrète ou formule d'Abel :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

Correction

Calculons, en remplaçant a_k par son expression

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - A_{k-1} B_k.\end{aligned}$$

Or, $B_k = B_{k-1} + b_k$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - A_{k-1} B_{k-1} - A_{k-1} b_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k B_k - A_{k-1} B_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= a_0 b_0 + A_n B_n - A_0 B_0 - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \text{ par télescopage} \\ &= A_n B_n - \sum_{\ell=0}^{n-1} A_\ell b_{\ell+1} \text{ par changement d'indice.}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) Retrouver le calcul de S_n.

Correction

On retrouve alors le même résultat en prenant $a_k = 2^k$ et $B_k = k$.

3. (Utilisation d'une fonction dérivée) On pose pour tout x dans $\mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

(a) Calculer la derivée de f et montrer que $S_n = 2f'(2)$.

Correction

f est dérivable car c'est un polynôme et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$.

On en déduit que

$$2f'(2) = 2\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} 2 \times k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

(b) Exprimer, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ sans le symbole somme et en déduire la valeur de S_n.

Correction

On remarque que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ est la somme des termes d'une suite géométrique. Donc, si $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, donc, pour tout $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(n+1)x^{n+1}(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

d'où, en évaluant en 2, et en multipliant par 2,

$$S_n = 2f'(2) = 2\frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(1-2)^2} = n2^{n+1} - n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2,$$

on retrouve alors le résultat demandé.

3 Coefficients binomiaux

Exercice 15. ●◐○ Calculer les sommes suivantes (n est un entier naturel non nul) :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Correction

Pour T_n, comme dans l'exercice 4, on propose deux méthodes :

- On utilise $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} kn\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}$$

  On effectue le changement de variables $\ell = k-1$. Quand $k=1$, $\ell = 0$, et quand $k=n$, $\ell = n-1$. Donc

$$\begin{aligned} T_n &= n\sum_{\ell=0}^{n}(\ell+1)\binom{n-1}{\ell} \\ &= n\sum_{\ell=0}^{n}\ell\binom{n-1}{\ell} + n\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n-1}{\ell} \\ &= n\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell\binom{n-1}{\ell} + n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell} \text{ (on a éliminé les termes nuls)} \\ &= n\sum_{\ell=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{\ell-1} + n2^{n-1} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

- Autre méthode : posons $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Alors $f' : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$. Alors $R_n = f'(1)$. Or, $f : x \mapsto (x+1)^n$, donc $f' : x \mapsto n(x+1)^{n-1}$, donc $R_n = f'(1) = n2^{n-1}$. Ensuite pour T_n, il faut remarquer que pour tout x

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2x^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} kx^{k-2},$$

  donc $f''(1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k$, i.e. $n(n-1)2^{n-2} = T_n - R_n$, d'où T_n !

Pour U_n, c'est du même acabit, mais dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+1}\binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1} \\
&=_{\ell=k+1} \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}(-1)^{\ell-1}\binom{n+1}{\ell} \\
&= -\frac{1}{n+1}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1}(-1)^{\ell}\binom{n+1}{\ell} - 1\right) \\
&= \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

car la somme alternée des coefficients binomiaux est nulle.

Exercice 16. ●●○

1. Développer $(1+x^5+x^7)^{20}$ à l'aide du binôme de Newton.
2. En déduire, en organisant convenablement les sommes, le coefficient de x^{17} dans $(1+x^5+x^7)^{20}$.

Correction

Développons $(1+x^5+x^7)^{20}$ par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(1+x^5+x^7)^{20} &= \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(x^5+x^7)^k \\
&= \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^{5l}x^{7(k-l)} \\
&= \sum_{k=0}^{20}\sum_{l=0}^{k}\binom{20}{k}\binom{k}{l}x^{5l}x^{7(k-l)}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir x^{17}, il faut avoir $5l+7(k-l)=17$. Ceci n'est possible que si $l=2$ et $k-l=1$. Donc le coefficient de x^{17} est

$$\binom{20}{3}\binom{3}{2} = 3420.$$

Exercice 17. ●●○ Montrer que pour tous entiers n et p,

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{n} = \binom{p+n+1}{n+1}.$$

Correction

Conseil : lorsqu'on a un résultat déjà donné, il faut l'utiliser ! Soit $\mathcal{P}_p$ la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{p+n+1}{n+1}. \tag{$\mathcal{P}_p$}$$

Initialisation. Pour $p = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k}{n} = 1,$$

et $\binom{0+n+1}{n+1} = 1$.
Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_p$ vraie pour un certain p. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p+1} \binom{n+k}{n} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} + \binom{n+p+1}{n} \\ &= \binom{p+n+1}{n+1} + \binom{n+p+1}{n}, \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= \binom{p+n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{p+1}$.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout entier naturel p par le principe de récurrence.

Exercice 18. ●●◐

Montrer que pour tous entiers n et p non nuls tels que $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

Correction

Utilisons les définitions des coefficients binomiaux : pour $p \leqslant n$ deux entiers et $0 \leqslant k \leqslant p$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!} \\ &= \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{p}{k}\binom{n}{p}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{p}\\ &= \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\\ &= \binom{n}{p}2^p,\ \text{par le binôme de Newton.}\end{aligned}$$

En déduire de la même manière une formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Correction

De même,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{n}{p}\\ &= \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\\ &= \begin{cases}0, & \text{si } p>0,\ \text{par le binôme de Newton.}\\ 1, & \text{si } p=0.\end{cases}\end{aligned}$$

Exercice 19. *Formule d'inversion de Pascal*. ●●◐ Soient n un entier naturel, $a_0,\dots,a_n$, $b_0,\dots,b_n$ $2n+2$ réels vérifiant

$$\forall p\in[\![0,n]\!],\ b_p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a_k.$$

On veut montrer la formule d'inversion de Pascal, écrite ci-dessous :

$$\forall p\in[\![0,n]\!],\ a_p=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}b_k.$$

1. **Dans cette question**, x est un réel et on pose, pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, $a_k=x^k$. Calculer, pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, b_p et vérifier la formule d'inversion de Pascal.

Correction

On calcule : soit p dans $[\![0,n]\!]$. Alors

$$b_p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k=(x+1)^p \text{ par la formule du binôme de Newton.}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On remarque alors que si $p \in [\![0, n]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (1+x)^k = (-1+1+x)^p = x^p = a_p,$$

donc la formule d'inversion de Pascal est bien vérifiée.

2. Démonstration de la formule générale.

(a) Démontrer que pour tous p, k et j dans $\mathbb{N}$, $\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}$.

Correction

Soient p, k et j dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{k!}{j!(j-k)!} = \frac{p!}{(p-k)!j!(k-j)!},$$

et

$$\binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j} = \frac{p!}{j!(p-j)!} \left(\frac{(p-j)!}{(k-j)!(p-j-(k-j))!} \right) = \frac{p!}{j!(k-j)!(p-k)!},$$

d'où l'égalité entre ces termes !

(b) En calculant, pour p dans $[\![0, n]\!]$, $\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k$ à l'aide de l'expression de b_k, démontrer la formule d'inversion de Pascal.

Correction

Soit p dans $[\![0, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}b_k &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}b_k \\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a_j \\
&= \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{k}{j}a_j \\
&= \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{p-k}\binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}a_j \\
&= \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=j}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}a_j \\
&= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}a_j\sum_{k=j}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p-j}{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}a_j\sum_{k=0}^{p-j}(-1)^{p-\ell-j}\binom{p-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\
&= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}a_j\sum_{\ell=0}^{p-j}(-1)^{p-j-\ell}\binom{p-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\
&= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}a_j\sum_{\ell=0}^{p-j}(1-1)^{p-j}.
\end{aligned}$$

Or, $0^{p-j} = 0$ sauf si $j = p$, donc la somme précédente égale a_p. D'où la formule !

Exercice 20. *Identité de Vandermonde*. ●●○ On se propose dans cet exercice de démontrer et de manipuler l'identité de Vandermonde

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ \forall n \in [\![0, a+b]\!],\ \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

1. (Une première preuve purement calculatoire) Démontrer le résultat par récurrence sur b. On précisera **soigneusement** la proposition à démontrer.

Correction

Démontrons la proposition suivante par récurrence sur l'entier b :

$$\forall a \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![0, a+b]\!],\ \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}. \qquad (\mathcal{P}_b)$$

Initialisation. Pour $b = 0$: soit a dans $\mathbb{N}$, soit n dans $[\![0, a]\!]$. Alors pour tout k dans

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

$[\![0,n]\!]$, $\dbinom{b}{n-k} = 0$ sauf pour $k = n$. Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a}{n}},$$

d'où l'initialisation.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_b$ vraie pour un certain entier naturel b. Soit a dans $\mathbb{N}$ et n dans $[\![0, a+b+1]\!]$.

$\boxed{\text{Si } n = a+b+1}$, alors pour tout $k < a$, $n - a > b$ donc $\dbinom{b+1}{n-k} = 0$ et pour tout $k > a$, $\dbinom{a}{k} = 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b+1}{n-k} = \binom{a}{a}\binom{b+1}{a+b+1-a} = 1 = \binom{a+b+1}{n}$.

$\boxed{\text{Si } n \in [\![0, a+b]\!]}$, alors, d'après la formule de Pascal,

$$\binom{a+b+1}{n} = \binom{a+b}{n-1} + \binom{a+b}{n},$$

avec la convention que $\dbinom{a+b}{-1} = 0$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\binom{a+b+1}{n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{a}{k}\binom{b}{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{a}{k}\binom{b}{n-1-k} + \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}\right] + \binom{a}{n}\binom{b}{0} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{a}{k} \left[\binom{b}{n-1-k} + \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}\right] + \binom{a}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{a}{k}\binom{b+1}{n-k} + \binom{a}{n}\binom{b+1}{0}, \text{ par la relation de Pascal,} \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b+1}{n-k}},
\end{aligned}$$

d'où le résultat (si $n = 0$, toutes les sommes allant jusqu'à $n-1$ sont nulles).

Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{P}_b$ est vraie pour tout entier naturel b en vertu du principe de récurrence.

2. (Une seconde preuve, avec un joli argument algébrique) *On ne suppose plus que l'on a prouvé la formule de Vandermonde*

(a) **Le produit de Cauchy.** (attention, question difficile) Montrer que pour tout x réel,

$$\left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{a+b} c_k x^k,$$

où, pour tout k dans $[\![0, a+b]\!]$, $c_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{a}{j}\binom{b}{k-j}$.

On remarquera en le justifiant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k} x^k$ et on utilisera le même type de raisonnement pour la seconde somme après avoir effectué un changement de variables.

Correction

Soit x un nombre réel. Alors

$$\left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{a}\sum_{j=0}^{b} \binom{a}{k} x^k \binom{b}{j} x^j$$
$$= \boxed{\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} x^{j+k}}$$

Posons, pour k fixé, la variable $\ell = k+j$. Alors quand $j = 0, \ell = k$, quand $j = b, \ell = k+b$. De plus, $j = \ell - k$. Donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} x^{j+k} = \sum_{\ell=k}^{k+b} \binom{b}{\ell-k} x^\ell$, donc

$$\left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \sum_{\ell=k}^{k+b} \binom{b}{\ell-k} x^\ell.$$

On va maintenant intervertir les sommes. Avant cela, on remarque que comme $\displaystyle\binom{b}{\ell-k} = 0$ pour tout $k > k+b$, $\displaystyle\sum_{\ell=k}^{k+b} \binom{b}{\ell-k} x^\ell = \sum_{\ell=k}^{a+b} \binom{b}{\ell-k} x^\ell$. De même, si $k > a$, $\displaystyle\binom{a}{k} = 0$ donc la somme recherchée est égale à

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k} \sum_{\ell=k}^{a+b} \binom{b}{\ell-k} x^\ell = \sum_{k=0}^{a+b}\sum_{\ell=k}^{a+b} \binom{a}{k}\binom{b}{\ell-k} x^\ell.$$

En intervertissant les sommes, on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k\right) = \sum_{\ell=0}^{a+b}\sum_{k=0}^{\ell} \binom{a}{k}\binom{b}{\ell-k} x^\ell = \boxed{\sum_{\ell=0}^{a+b} c_\ell x^\ell},$$

avec $\boxed{c_\ell = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} \binom{a}{k}\binom{b}{\ell-k}}$, ce qui est exactement le résultat recherché.

(b) **Démonstration de la formule de Vandermonde.** On admettra le résultat suivant :

Lemme 1

Soit n un entier naturel, $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$ $2n+2$ réels. Si pour tout x réel, on a
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$
alors $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \dots, a_n = b_n$.

En développant $(1+x)^{a+b}$ de deux manières différentes, démontrer l'identité de Vandermonde.

Correction

Soit x un nombre réel. Alors, par la formule du binôme de Newton,
$$\boxed{(1+x)^{a+b} = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} x^k}.$$

De même, $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k$ et $(1+x)^b = \sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k$, donc
$$\begin{aligned}(1+x)^{a+b} &= (1+x)^a (1+x)^b \\ &= \left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k\right) \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{a+b} c_k x^k},\end{aligned}$$

donc, par le lemme, pour tout k dans $[\![0, a+b]\!]$, $c_k = \binom{a+b}{k}$, donc, pour tout k dans $[\![0, a+b]\!]$, $\boxed{\binom{a+b}{k} = \sum_{j=0}^{j} \binom{a}{j}\binom{b}{k-j}}$, d'où le résultat.

3. Déduire de la formule de Vandermonde la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour tout entier naturel n.

Correction

Soit n un entier naturel. En appliquant la formule de Vandermonde avec $a = b = n$, on obtient
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Or, pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$, donc

$$\boxed{\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2}.$$

Remarque : $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, et cette formule n'est pas simplifiable davantage !

4 Systèmes linéaires

Exercice 21. ◐○○ Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$.

Correction

Non corrigé, me demander si besoin de vérifications de calculs

Exercice 22. ●○○ Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

Correction

Non corrigé, me demander si besoin de vérifications de calculs

Exercice 23. ●◐○ Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

1. $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$.

Correction

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz=m^2 \\ x+my+z=m \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ mx+y+z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz=m^2 \\ (m-1)y+(1-m)z=m(1-m) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-m)y+(1-m^2)z=1-m^3=(1+m+m^2)(1-m) \quad L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases}$$

Remarquez que j'ai le droit de faire $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ sans condition sur m alors que je n'ai pas le droit de faire $L_1 \leftarrow L_3 - mL_1$ sans supposer que $m \neq 0$! !
Si $m=1$, le système devient l'équation $x+y+z=1$, il est alors équivalent à

$$\begin{cases} x=1-t-s \\ y=s \\ z=t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{(1,0,0)+s(-1,1,0)+t(-1,0,1) | s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Si $m \neq 1$, le système devient

$$\begin{cases} x+y+mz=m^2 \\ (m-1)y+(1-m)z=m(1-m) \\ (1-m)y+(1-m^2)z=1-m^2=(1+m+m^2)(1-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz=m^2 \\ -y+z=m \\ y+(1+m)z=1+m+m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz=m^2 \\ -y+z=m \\ (2+m)z=1+2m+m^2 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Si $m=-2$, la ligne L_3 devient $0=1$, le système est incompatible et l'ensemble des solutions est vide.
Si $m \neq -2$, le système est résoluble et LA solution du système est $\left\{(-\frac{m+1}{2+m}, \frac{1}{2+m}, \frac{(1+m)^2}{2+m})\right\}$.

Exercice 24. *Une propriété de somme directe.* ●●○ Soient H et D les deux ensembles suivants

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0 \right\} \text{ et } D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Démontrer que $\forall X \in \mathbb{R}^4,\ \exists!(U,V) \in H \times D,\ X = U+V$.

Correction

Soit $X \in \mathbb{R}^4$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Démontrons par analyse-synthèse : $\exists!(U, V) \in H \times D,\ X = U + V$.

Analyse. Supposons qu'il existe $(U, V) \in H \times D$ tels que $X = U + V$. Alors, on dispose de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a + b + c + d = 0$ et $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $V = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{cases} a + \lambda = x \\ b + \lambda = y \\ c + \lambda = z \\ d + \lambda = t \end{cases}$$

En sommant les 4 lignes, et comme $a + b + c + d = 0$, on obtient $\lambda = x + y + z + t$, ainsi $\boxed{\lambda = \dfrac{x + y + z + t}{4}}$. De plus,

$$\begin{cases} a = x - \lambda = x - \dfrac{x + y + z + t}{4} \\ b = y - \lambda = y - \dfrac{x + y + z + t}{4} \\ c = z - \lambda = z - \dfrac{x + y + z + t}{4} \\ d = t - \lambda = t - \dfrac{x + y + z + t}{4} \end{cases}$$

D'où l'unicité de la décomposition !

Synthèse. Posons $\lambda = \dfrac{x + y + z + t}{4}$, $V = \lambda . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = X - V$. Alors

- $V \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,
- $U + V = X$,
- Si l'on somme les 4 coordonnées de U, on obtient

  $$\begin{aligned} &x - \frac{x + y + z + t}{4} + y - \frac{x + y + z + t}{4} + z - \frac{x + y + z + t}{4} + t - \frac{x + y + z + t}{4} \\ &= z + y + z + t - 4\frac{x + y + z + t}{4} = 0, \end{aligned}$$

  donc $U \in H$.

D'où l'existence, et le résultat désiré !

5 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 25. ●○○ Démontrer que pour tous x et y réels, pour tout $\lambda > 0$, $xy \leqslant \dfrac{x^2}{2\lambda} + \dfrac{\lambda y^2}{2}$.

Correction

Soient x et y deux réels, $\lambda > 0$. Alors

$$\begin{aligned} xy \leqslant \frac{x^2}{2\lambda} + \frac{\lambda y^2}{2} &\Leftrightarrow 2\lambda xy \leqslant x^2 + \lambda^2 y \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 + \lambda^2 y - 2\lambda xy = (x - \lambda y)^2, \end{aligned}$$

inégalité qui est toujours vraie ! D'où le résultat.

Exercice 26. ●◐○ Soient a et b deux réels, on note $\max(a, b)$ le maximum des deux nombres a et b.

1. Montrer que
$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

Correction

Faisons une disjonction de cas !

- Si $a \leqslant b$, $\max(a, b) = b$, et $|a - b| = b - a$ Donc $\dfrac{a + b + |a - b|}{2} = \dfrac{a + b + b - a}{2} = \dfrac{2b}{2} = b$.
- Si $a \geqslant b$, $\max(a, b) = a$, et $|a - b| = a - b$ Donc $\dfrac{a + b + |a - b|}{2} = \dfrac{a + b + a - b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

2. En déduire une expression avec les valeurs absolues pour $\min(a, b)$, le minimum de a et de b.

Correction

De même, $\min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

3. Que vaut $\min(a, b) + \max(a, b)$?

Correction

Résultat à avoir en tête (mais facile à retrouver) : $\min(a, b) + \max(a, b) = a + b$.

Pour tout nombre réel x, on note $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$, appelées respectivement parties positive et négative de x.

4. Exprimer x et $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.

Correction

On remarque que $x = x^+ - x^-$ et que $|x| = x^+ + x^-$.
Remarque : cette formule peut être très utile si on a à gérer des **fonctions** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: on peut alors parler de partie positive et négative de la fonction.

Exercice 27. ●●○ Soient x et y deux réels, n un entier naturel. Comparer $\lfloor x+y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, et comparer $\lfloor nx \rfloor$ et $n\lfloor x \rfloor$.

Correction

On sait que $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x+y$, donc, comme $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. On n'a pas égalité en général : prendre $x = y = \dfrac{1}{2}$.

En revanche, on peut montrer que $\lfloor x+y \rfloor - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$. En effet, $\lfloor x \rfloor > x - 1$ et $\lfloor y \rfloor > y - 1$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor > x + y - 2$. Or, $\lfloor x+y \rfloor \leqslant x + y$, donc $\lfloor x+y \rfloor - 2 < x + y - 2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ car les parties entières sont des entiers.
Par une récurrence (que je ne rédige pas là, me demander), on montre que pour tout entier naturel n, $\lfloor nx \rfloor - n \leqslant n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 28. ●●○ Montrer que pour tout entier n,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

Correction

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie, où

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

Initialisation. Pour $n = 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) = 2 \geqslant 3 - \frac{1}{n}$.
Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vrai pour un certain entier n. Alors

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) &= \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \\ &\geqslant \left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(3 - \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Notre but est alors de montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(3 - \frac{1}{n}\right) \geqslant 3 - \frac{1}{n+1}.$$

On étudie alors

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{3-\frac{1}{n+1}} &= \frac{(1+(n+1)^3)(3n-1)}{n(1+n)^2(3(n+1)-1)} \\
&= \frac{(n^3+3n^2+3n+2)(3n-1)}{n(1+2n+n^2)(3n+2)} \\
&= \frac{3n^4+9n^3+9n^2+6n-(1+n^3+3n^2+3n+1)}{(n+2n^2+n^3)(3n+2)} \\
&= \frac{3n^4+8n^3+6n^2+3n-1}{3n^2+6n^3+3n^4+2n+4n^2+2n^3} \\
&= \frac{3n^4+8n^3+6n^2+3n-1}{3n^4+8n^3+6n^2+2n}.
\end{aligned}$$

Or, pour $n \geqslant 1$, $3n-1 \geqslant 2n$, donc $\dfrac{3n^4+8n^3+6n^2+3n-1}{3n^4+8n^3+6n^2+2n} \geqslant 1$, donc

$$\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right) \geqslant 3-\frac{1}{n+1},$$

d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 1, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul par le principe de récurrence.

Exercice 29. ●●● Montrer que pour tous réels strictement positifs (a, b) et que pour tout entier n,

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

Correction

Utilisons la formule du binôme de Newton pour cet exercice. Soient a, b deux réels, n un entier. Posons $x = \dfrac{a}{b}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^k + \left(\frac{1}{x}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

Or, pour tout réel strictement positif y, $\left(y + \left(\dfrac{1}{y}\right)\right) \geqslant 2$. En effet,

$$(1-y)^2 \geqslant 0,$$

i.e. $1-2y+y^2 \geqslant 0$, i.e. $1+y^2 \geqslant 2y$, i.e.

$$\frac{1}{y} + y \geqslant 2.$$

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^k+\left(\frac{1}{x}\right)^k\right) &\geqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2\\ &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\ &= 2.2^n = 2^{n+1},\end{aligned}$$

d'où le résultat recherché.

6 Trigonométrie

Exercice 30. *Quelques équations trigonométriques*. ●○○ − ●●◐

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, sauf cas à préciser :

(a) $\sin(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) &\Leftrightarrow x = x+\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x = \pi - x - \frac{\pi}{3}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow 0 = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}[\pi]\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(b) $\sin(2x) = \cos(x)$

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \cos(x) &\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) = \cos(x)\\ &\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } 2\sin(x) = 1\\ &\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x = \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}[\pi]\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - x = \frac{x}{2}[2\pi] \text{ ou } \frac{3\pi}{4} - x = -\frac{x}{2}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{3\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}\left[\frac{4\pi}{3}\right] \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}[4\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(d) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Correction

Là, il s'agit d'écrire $\sin(x) + \cos(x)$ sous la forme $A\sin(x+\varphi)$.
Supposons qu'un tel A et un tel x existent. Alors

$$A\sin(x+\varphi) = A\sin(x)\cos(\varphi) + A\cos(x)\sin(\varphi).$$

Ainsi, on impose $A\cos(\varphi) = 1$ et $A\sin(\varphi) = 1$. Ainsi, comme $\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi) = 1$, $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^2} = 1$, doit $A^2 = 2$. Donc $A = \sqrt{2}$. Puis on veut $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\varphi)$, soit $\varphi = \frac{\pi}{4}$. L'équation devient alors

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\\ &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}[2\pi] \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12}[2\pi]\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(e) $\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)=1$

Correction

On fait de même que précédemment. On trouve, par la même technique, que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}[2\pi].\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(f) $\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}$

Correction

On a déjà vu cette expression ! Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ &\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(g) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction

Là, il s'agit d'utiliser l'expression $\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$. Soit

$x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 2x = \frac{4\pi}{3}[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}[\pi] \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}[\pi]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(h) $\tan(x) = \tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Correction

Déjà, il faut que $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $x \neq 0[\pi]$. Soit x vérifiant ces conditions. Alors

$$\tan(x) = \tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \tan(x) = -\frac{1}{\tan(x)} \Leftrightarrow \tan^2(x) = -1.$$

L'ensemble des solutions est donc vide.

(i) $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$

Correction

Si $x = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $x = 0[2\pi]$, alors l'égalité est évidente.
Sinon, $\sqrt{\cos(x)} \in]0,1[$ donc $\cos^2(x) < \sqrt{\cos(x)}$ et $\sqrt{\sin(x)} \in]0,1[$ donc $\sin^2(x) < \sqrt{\sin(x)}$. Ainsi, $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} < \cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$, donc $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} < 1$, absurde !
Donc les seules solutions sont $x = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $x = 0[2\pi]$.

(j) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\cos^2(x)+\cos^2(2x)+\cos^2(3x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} + \frac{1+\cos(4x)}{2} + \cos^2(3x)\\ &= 1 + \frac{\cos(2x)+\cos(4x)}{2} + \cos^2(3x)\\ &= 1 + \frac{2\cos(x)\cos(3x)}{2} + \cos^2(3x)\\ &= 1 + \cos(x)\cos(3x) + \cos^2(3x).\end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos^2(x)+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)=1 &\Leftrightarrow 1+\cos(x)\cos(3x)+\cos^2(3x)=1\\ &\Leftrightarrow \cos(3x)(\cos(x)+\cos(3x))=0\\ &\Leftrightarrow \cos(3x)=0 \text{ ou } \cos(x)=-\cos(3x)\\ &\Leftrightarrow \cos(3x)=0 \text{ ou } \cos(x)=\cos(3x+\pi)\\ &\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x=3x+\pi[2\pi] \text{ ou } x=-3x-\pi[2\pi]\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } x=-\frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x=-\frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, sauf cas à préciser :

(a) $\tan(x)\leqslant\sqrt{3}$

Correction

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Alors

$$\tan(x)\leqslant\sqrt{3}\Leftrightarrow\tan(x)\leqslant\tan\frac{\pi}{3},$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right].$$

(b) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2}$

Correction

Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sin\frac{\pi}{6}\\ &\Leftrightarrow 2x-\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\\ &\Leftrightarrow 2x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]\\ &\Leftrightarrow xx\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\pi+k\pi\right]\cup\left[\frac{7\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right].\end{aligned}$$

(c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déjà,

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant -2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4} + x\right)$$
$$\Leftrightarrow 0 \geqslant \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4} + x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \geqslant 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) \leqslant 0\right] \text{ ou } \left[\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \leqslant 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) \geqslant 0\right]$$
$$\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2} \in [0, \pi]$$

(d) $\sin(x) - \cos(x) \geqslant 1$

Exercice 31. *Valeurs non usuelles de fonctions trigonométriques*. ●◐○

1. En calculant $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, déterminer une valeur de $\cos(7\pi/12)$.

Correction

On remarque que $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$, donc

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

2. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. En déduire une valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Correction

On a

$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$

On en déduit, en prenant $\theta = \frac{\pi}{10}$, que

$$0 = 16\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 - 20\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + 5\left(\frac{\pi}{10}\right),$$

donc, comme $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$,

$$16\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - 20\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + 5 = 0,$$

donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine de $16x^2 - 20x + 5$, de discriminant $400 - 320 = 80$, d'où deux solutions, $\frac{20 \pm \sqrt{80}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$. Or, $\frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4}$ donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \geqslant \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Finalement,

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 = 2\frac{5+\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 32. ●◐○ Montrer les identités suivantes, en précisant pour quels réels elles sont valides.

1. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

Correction

On remarque que

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin(x)\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\cos(x) + \sin(x) + \sin(x)\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\cos(x) \\ &= -\frac{1}{2}\sin(x) + \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = 0.\end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour tous les réels x.

2. $\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{2}{\sin(2x)}$.

Correction

Les deux membres de cette égalité existent dès que $\tan(x)$ est définie et ne s'annule pas, i.e. $x \neq 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$, et dès que $\sin(2x)$ ne s'annule pas, i.e. $x \neq 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Ensuite, si $x \neq 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{2}{\sin(2x)}.$$

3. $\tan(x) - \frac{1}{\tan(x)} = -\frac{2}{\tan(2x)}$.

Correction

Les deux membres de cette égalité existent dès que $\tan(x)$ est définie et ne s'annule pas, i.e. $x \neq 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$, et dès que $\tan(2x)$ est définie et ne s'annule pas, i.e. $x \neq 0 \left[\frac{\pi}{4}\right]$. Ensuite, si $x \neq 0 \left[\frac{\pi}{4}\right]$,

$$\tan(x) - \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{-\cos(2x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)} = -\frac{2}{\tan(2x)}.$$

D'où le résultat.

Exercice 33. ●●◐ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tous $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ réels,

$$\sum_{(\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta_k).$$

Correction

L'exercice peut sembler dur à saisir mais il n'est pas si compliqué si on s'y prend bien. L'idée est que dans la somme sur $(\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, il va y avoir des termes de la forme $\cos(a+b)$ et d'autres de la forme $\cos(a-b)$ qui, additionnés, vont se transformer en $2\cos(a)\cos(b)$. L'idée, pour rédiger proprement, est donc de faire une récurrence sur n.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propositon : $\forall (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{(\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta_k).$$

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n = 1$. **Soit** $\theta_1 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{\varepsilon_1 \in \{-1,1\}} \cos(\varepsilon_1 \theta_1) = \cos(-\theta_1) + \cos(\theta_1) = 2\cos(\theta_1),$$

d'où l'initialisation.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n. Soient alors $(\theta_1, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1})$

$n+1$ réels. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \cos\left(\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon_k\theta_k\right) &= \sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\ \sum_{\varepsilon_{n+1}\in\{-1,1\}} \cos\left(\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon_k\theta_k\right) \\
&= \sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \left[\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\theta_k - \theta_{n+1}\right) + \cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\theta_k + \theta_{n+1}\right)\right] \\
&= \sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \times 2\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\theta_k\right)\cos(\theta_{n+1}) \\
&= 2\cos(\theta_{n+1}) \sum_{(\varepsilon_1\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \times \cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\theta_k\right) \\
&= 2\cos(\theta_{n+1}) \times 2^n \prod_{k=1}^{n}\cos(\theta_k) \text{ par hypothèse de récurrence.} \\
&= 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\cos(\theta_k).
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Indications

1 Se ramener à des sommes connues : la somme des k, des k^2, ou les sommes géométriques.

2 Pour A_n, écrire la somme comme une somme double, et séparer les cas $j \leqslant i$ et $j > i$. Pour B_n< mettre la somme sur i à l'intérieur.

3 Calculer d'abord S_n puis faire des dessins pour comprendre quels sont les indices pris en compte dans T_n, U_n, etc.

4 Pour R_n, deux possibilités : utiliser $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, ou utiliser la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Pour $S_{n,p}$, regarder quelques exemples à l'aide du triangle de Pascal et conjecturer une formule simple.

5 Distinguer les cas $\lambda + \mu = / \neq 0$, puis $\lambda = / \neq 0$.

6
- **1.** Mettre au carré les deux côtés de l'égalité.
- **2.** Distinguer les cas $x \leqslant y$ et $x \geqslant y$.
- **3.** Mettre les deux côtés au carré.

7 Pour l'inégalité sur $\|\cdot\|_1$, écrire la somme et utiliser l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité sur $\|\cdot\|_\infty$, penser que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$.

9
- — Utiliser que $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$.
- — Utiliser que $k.k! = (k+1-1)k!$.
- — Déterminer a, b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$, puis introduire $u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et reconnaître un télescopage faisant intervenir u_k.

10 Pour le **1.**, faire une récurrence sur n.

11 Regrouper les termes deux par deux.

12
- — pour S_n, deux possibilités : calculer la somme $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$, puis exprimer S_n à l'aide de cette somme, ou bien calculer simplement la somme double.
- — pour U_n, deux méthodes proposées : séparer la somme en deux ou faire un changement d'indices.

13
- **1.** Développer simplement l'expression.
- **2.** Penser qu'un polynôme de degré 2 de signe constant est de discriminant négatif.
- **3.** Utiliser que $1 = \sqrt{a_k} \times \frac{1}{\sqrt{a_k}}$.

14
- **1.** Utiliser le fait que 2^k est constant dans la seconde somme.
- **2.** (a)
  (b) Remplacer a_k par son expression.
  (c) Prendre $a_k = 2^k$ et $B_k = k$.
- **3.** (a) Penser que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.
  (b) Penser que $f(x)$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

15 Pour T_n, s'inspirer de l'exercice 4. Pour U_n, utiliser la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

17 Comme le résultat est déjà donné, faire un raisonnement par récurrence.

18 Démontrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

19 **1.**

2. (a) Calcul fait à l'exercice 18.

(b) Écrire une somme double et inverser les termes, puis utiliser la question précédente.

16 **1.**

2. Dire qu'il faut que $5\ell + 7(k-\ell) = 17$.

23 **1.** Distinguer les cas.

2. Distinguer $m = 1$, $m = -2$ et le reste.

24 Il faut ici faire une analyse-synthèse !

25 Penser que l'on peut multiplier par 2λ et reconnaître une identité remarquable.

26 **1.** Disjoindre les cas.

2. Changer un $+$ en $-$

3. Faire simplement le calcul.

4.

27 **1.** Démontrer que $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et penser à des nombres rationnels simples pour montrer qu'on n'a pas égalité.

2. Démontrer que $\lfloor nx \rfloor - n \leqslant n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$.

28 Faire une récurrence : pour l'hérédité, étudier préc'isément la différence de deux termes, développer le numérateur et le dénominateur de la fraction : ne pas avoir peur de calculs un peu gros.

29 — Poser $x = \frac{a}{b}$, utiliser la formule du binôme de Newton.

— Vérifier que pour tout $y > 0$, $y + \frac{1}{y} \geqslant 2$.