TD 2
Calculs

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ◐○○ Calculer les sommes et produits suivants :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(n-k),\ T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}},\ U_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 2. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $A_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$ et $B_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Exercice 3. ●●○ Calculer

$$S_n = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij,\ T_n = \prod_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} ij,\ U_n = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij,\ V_n = \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij,\ W_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij,\ X_n = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} ij.$$

Exercice 4. ●○○ Calculer les sommes suivantes

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k},\ S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \text{ [avec } p \leqslant n]$$

Exercice 5. ●◐○ Discuter, en fonction de la valeur des paramètres λ et μ, des solutions réelles du système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda x - \mu y = 0 \\ \mu x + \lambda y = \mu \end{cases}$$

Exercice 6. ●○○ Soient x et y deux réels positifs.

1. (Une inégalité triangulaire) Montrer que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2. En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.
3. (Inégalité arithmético-géométrique) Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

Exercice 7. ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Démontrer que pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+y\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1 \text{ et } \|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Exercice 8. ●●○ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k\theta)$. En considérant $\sin(\theta)S_n$, calculer S_n.

Stratégie de résolution. Pour ce TD, il faut insister sur 3 points :

- le plus important, les calculs de sommes/coefficients binomiaux/etc. Faire en priorité l'exercice 9, 12, 15. Ensuite, regarder d'autres exercices comme le 14 (**très bon exercice de révision de différentes méthodes**), 13, 17 et 18.
- pour les systèmes linéaires, vérifiez rapidement que vous savez faire des systèmes de base (si ce n'est pas le cas, faites 21 et 22). Faites 23 si vous avez mal compris le principe des paramètres. **Ne pas y passer trop de temps**.
- faire un peu d'inégalités sur les réels, notamment 25 et 27.

2 Sommes et produits

Exercice 9. ●○○ Calculer au moyen d'un télescopage les sommes suivantes pour tout entier n non nul

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$

3. (●●○)$U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 10. *Divergence de la série harmonique*. ●○○

1. Montrer que pour tout entier n,

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}.$$

2. Qu'en déduire sur la convergence de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$?

On admet qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 11. ●◐○ En regroupant judicieusement les termes, calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$$

pour tout entier non nul n.

Exercice 12. ●◐○ Calculer les sommes suivantes

1. $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$

2. $U_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)$ [avec $n > 1$]

Exercice 13. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*. ●●○ Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

On note
$$A=\sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B=\sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ C=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit alors x un réel. Développer $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2$ et l'écrire en fonction de A, B et C.

2. Déduire de l'étude du signe de la fonction f l'inégalité désirée.

3. Soient a_1, a_2,..., a_n une suite de réels strictement positifs. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

Exercice 14. ●●○ On se propose de calculer de trois manières différentes (dont deux vues en cours : ce sont des révisions !) la somme $S_n=\sum_{k=1}^{n} k2^k$ (où $n\in\mathbb{N}$).

1. (calcul direct) Montrer que $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k$ et en déduire la valeur de S_n.

2. (transformation d'Abel) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On pose
$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k.$$

(a) Déterminer a_n et b_n en fonction de A_n, A_{n-1}, B_n et B_{n-1}.

(b) Montrer la formule suivante, appelée formule d'intégration par parties discrète ou formule d'Abel :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

(c) Retrouver le calcul de S_n.

3. (Utilisation d'une fonction dérivée) On pose pour tout x dans $\mathbb{R}$ $f(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$.

(a) Calculer la derivée de f et montrer que $S_n=2f'(2)$.

(b) Exprimer, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ sans le symbole somme et en déduire la valeur de S_n.

3 Coefficients binomiaux

Exercice 15. ●◐○ Calculer les sommes suivantes (n est un entier naturel non nul) :
$$T_n=\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k},\ U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 16. ●●○

1. Développer $(1+x^5+x^7)^{20}$ à l'aide du binôme de Newton.

2. En déduire, en organisant convenablement les sommes, le coefficient de x^{17} dans $(1+x^5+x^7)^{20}$.

Exercice 17. ●●○ Montrer que pour tous entiers n et p,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{p+n+1}{n+1}.$$

Exercice 18. ●●◐

Montrer que pour tous entiers n et p non nuls tels que $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

En déduire de la même manière une formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 19. *Formule d'inversion de Pascal*. ●●◐ Soient n un entier naturel, $a_0, \dots, a_n$, $b_0, \dots, b_n$ $2n+2$ réels vérifiant

$$\forall p \in [\![0,n]\!],\ b_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k.$$

On veut montrer la formule d'inversion de Pascal, écrite ci-dessous :

$$\forall p \in [\![0,n]\!],\ a_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k.$$

1. Dans cette question, x est un réel et on pose, pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, $a_k = x^k$. Calculer, pour tout p dans $[\![0,n]\!]$, b_p et vérifier la formule d'inversion de Pascal.

2. Démonstration de la formule générale.

(a) Démontrer que pour tous p, k et j dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}$.

(b) En calculant, pour p dans $[\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k} b_k$ à l'aide de l'expression de b_k, démontrer la formule d'inversion de Pascal.

Exercice 20. *Identité de Vandermonde*. ●●○ On se propose dans cet exercice de démontrer et de manipuler l'identité de Vandermonde

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ \forall n \in [\![0,a+b]\!],\ \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

1. (Une première preuve purement calculatoire) Démontrer le résultat par récurrence sur b. On précisera **soigneusement** la proposition à démontrer.

2. (Une seconde preuve, avec un joli argument algébrique) *On ne suppose plus que l'on a prouvé la formule de Vandermonde*

(a) **Le produit de Cauchy.** (attention, question difficile) Montrer que pour tout x réel,

$$\left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{a+b} c_k x^k,$$

où, pour tout k dans $[\![0, a+b]\!]$, $c_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{a}{j}\binom{b}{k-j}$.

On remarquera en le justifiant que $\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k} x^k$ et on utilisera le même type de raisonnement pour la seconde somme après avoir effectué un changement de variables.

(b) **Démonstration de la formule de Vandermonde.** On admettra le résultat suivant :

Lemme 1

Soit n un entier naturel, $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$ $2n+2$ réels. Si pour tout x réel, on a

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

alors $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \dots, a_n = b_n$.

En développant $(1+x)^{a+b}$ de deux manières différentes, démontrer l'identité de Vandemonde.

3. Déduire de la formule de Vandermonde la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour tout entier naturel n.

4 Systèmes linéaires

Exercice 21. ◐○○ Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$.

Exercice 22. ●○○ Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

Exercice 23. ●◐○ Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

1. $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$.

Exercice 24. *Une propriété de somme directe*. ●●○ Soient H et D les deux ensembles suivants

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0 \right\} \text{ et } D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Démontrer que $\forall X \in \mathbb{R}^4,\ \exists!(U,V) \in H \times D,\ X = U + V$.

5 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 25. ●○○ Démontrer que pour tous x et y réels, pour tout $\lambda > 0$, $xy \leqslant \dfrac{x^2}{2\lambda} + \dfrac{\lambda y^2}{2}$.

Exercice 26. ●◐○ Soient a et b deux réels, on note $\max(a,b)$ le maximum des deux nombres a et b.

1. Montrer que

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$$

2. En déduire une expression avec les valeurs absolues pour $\min(a,b)$, le minimum de a et de b.

3. Que vaut $\min(a,b) + \max(a,b)$?

Pour tout nombre réel x, on note $x^+ = \max(0,x)$ et $x^- = \max(0,-x)$, appelées respectivement parties positive et négative de x.

4. Exprimer x et $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.

Exercice 27. ●●○ Soient x et y deux réels, n un entier naturel. Comparer $\lfloor x+y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, et comparer $\lfloor nx \rfloor$ et $n\lfloor x \rfloor$.

Exercice 28. ●●○ Montrer que pour tout entier n,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 29. ●●● Montrer que pour tous réels strictement positifs (a,b) et que pour tout entier n,

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

6 Trigonométrie

Exercice 30. *Quelques équations trigonométriques*. ●○○ − ●●◐

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, sauf cas à préciser :

(a) $\sin(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(b) $\sin(2x) = \cos(x)$

(c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(d) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

(e) $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 1$

(f) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$

(g) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(h) $\tan(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(i) $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$

(j) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$

2. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, sauf cas à préciser :

(a) $\tan(x) \leqslant \sqrt{3}$

(b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2}$

(c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(d) $\sin(x) - \cos(x) \geqslant 1$

Exercice 31. *Valeurs non usuelles de fonctions trigonométriques*. ●◐○

1. En calculant $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, déterminer une valeur de $\cos(7\pi/12)$.

2. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. En déduire une valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 32. ●◐○ Montrer les identités suivantes, en précisant pour quels réels elles sont valides.

1. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

2. $\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{2}{\sin(2x)}$.

3. $\tan(x) - \frac{1}{\tan(x)} = -\frac{2}{\tan(2x)}$.

Exercice 33. ●●◐ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tous $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ réels,

$$\sum_{(\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta_k).$$

Indications

1 Se ramener à des sommes connues : la somme des k, des k^2, ou les sommes géométriques.

2 Pour A_n, écrire la somme comme une somme double, et séparer les cas $j \leqslant i$ et $j > i$. Pour B_n< mettre la somme sur i à l'intérieur.

3 Calculer d'abord S_n puis faire des dessins pour comprendre quels sont les indices pris en compte dans T_n, U_n, etc.

4 Pour R_n, deux possibilités : utiliser $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, ou utiliser la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Pour $S_{n,p}$, regarder quelques exemples à l'aide du triangle de Pascal et conjecturer une formule simple.

5 Distinguer les cas $\lambda + \mu = / \neq 0$, puis $\lambda = / \neq 0$.

6 **1.** Mettre au carré les deux côtés de l'égalité.

2. Distinguer les cas $x \leqslant y$ et $x \geqslant y$.

3. Mettre les deux côtés au carré.

7 Pour l'inégalité sur $\|\cdot\|_1$, écrire la somme et utiliser l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité sur $\|\cdot\|_\infty$, penser que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$.

9
- Utiliser que $1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$.
- Utiliser que $k.k! = (k+1-1)k!$.
- Déterminer a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$, puis introduire $u_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, et reconnaître un télescopage faisant intervenir u_k.

10 Pour le **1.**, faire une récurrence sur n.

11 Regrouper les termes deux par deux.

12
- pour S_n, deux possibilités : calculer la somme $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$, puis exprimer S_n à l'aide de cette somme, ou bien calculer simplement la somme double.
- pour U_n, deux méthodes proposées : séparer la somme en deux ou faire un changement d'indices.

13 **1.** Développer simplement l'expression.

2. Penser qu'un polynôme de degré 2 de signe constant est de discriminant négatif.

3. Utiliser que $1 = \sqrt{a_k} \times \dfrac{1}{\sqrt{a_k}}$.

14 **1.** Utiliser le fait que 2^k est constant dans la seconde somme.

2. (a)

(b) Remplacer a_k par son expression.

(c) Prendre $a_k = 2^k$ et $B_k = k$.

3. (a) Penser que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

(b) Penser que $f(x)$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

15 Pour T_n, s'inspirer de l'exercice 4. Pour U_n, utiliser la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

17 Comme le résultat est déjà donné, faire un raisonnement par récurrence.

18 Démontrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

19 **1.**

2. (a) Calcul fait à l'exercice 18.

(b) Écrire une somme double et inverser les termes, puis utiliser la question précédente.

16 **1.**

2. Dire qu'il faut que $5\ell + 7(k-\ell) = 17$.

23 **1.** Distinguer les cas.

2. Distinguer $m = 1$, $m = -2$ et le reste.

24 Il faut ici faire une analyse-synthèse !

25 Penser que l'on peut multiplier par 2λ et reconnaître une identité remarquable.

26 **1.** Disjoindre les cas.

2. Changer un $+$ en $-$

3. Faire simplement le calcul.

4.

27 **1.** Démontrer que $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et penser à des nombres rationnels simples pour montrer qu'on n'a pas égalité.

2. Démontrer que $\lfloor nx \rfloor - n \leqslant n \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$.

28 Faire une récurrence : pour l'hérédité, étudier préc'isément la différence de deux termes, développer le numérateur et le dénominateur de la fraction : ne pas avoir peur de calculs un peu gros.

29 — Poser $x = \dfrac{a}{b}$, utiliser la formule du binôme de Newton.

— Vérifier que pour tout $y > 0$, $y + \dfrac{1}{y} \geqslant 2$.