

MPSI 1

Mathématiques DS 08

Samedi 30 mars – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un « vrai ou faux » et d'un problème. Il est conseillé de passer le temps d'une interro (une vingtaine de minutes) sur le « vrai ou faux ».
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats et numérotez vos pages.**
Le soin apporté à la copie est un paramètre qui sera pris en compte dans l'évaluation.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♪ Bon courage! ♪

Exercice 1. VRAI ou FAUX ? Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. Dans tous les cas, justifier précisément : par une preuve (si c'est une question de cours, redémontrer les choses).

1. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

2. Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$ et $\ker(u) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, alors u est surjective.

3. Il existe une injection de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$.

4. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

5. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = E$, alors u vérifie $u \circ u = u$.

6. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u + \text{Id}) = E$, alors u est une symétrie.

Problème 1. Endomorphisme de dérivation et équations différentielles linéaires

Le but de ce problème est d'utiliser des outils d'algèbre linéaire pour étudier des équations différentielles à coefficients constants mais d'ordre quelconque.

La partie A. étudie les propriétés de l'endomorphisme de dérivation.

La partie B. fait le lien entre l'endomorphisme de dérivation et les équations différentielles via la notion de polynôme d'endomorphisme.

La partie C. permet de résoudre un certain type d'équations différentielles.

Enfin, la partie D. conclut le problème, en donnant la dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle et en regardant un exemple.

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans ce problème, on assimile polynôme et fonction polynomiale, si bien que l'on considèrera que $\mathbb{C}[X]$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

On note D l'endomorphisme de dérivation :

$$D : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto f' \end{cases}$$

A. L'endomorphisme D

A-I. Premières propriétés algébriques

1. Déterminer très rapidement $\ker(D)$ et $\text{Im}(D)$.

On note, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $D^k = \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{k \text{ fois}}$ et $D^0 = \text{Id}_E$.

2. Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\ker(D^k) = \mathbb{C}_{k-1}[X]$.

Si ψ est un endomorphisme de E , et F est un sous-espace vectoriel de E , on dit que F est stable par ψ si $\psi(F) \subset F$. On dit aussi que ψ stabilise F .

3. Vérifier que pour tout n , $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par D . Vérifier qu'il existe des sous-espaces vectoriels stricts de E stables par D qui ne soient pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[X]$.

4. On appelle D_n l'endomorphisme $D_n : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$. Déterminer $\ker(D_n)$ et $\text{Im}(D_n)$.
Préciser le rang de D_n .

Les sous-sections A-II. et A-III. établissent des résultats indépendants du reste du problème.

A-II. D vu comme projecteur ou symétrie

On se demande dans cette partie s'il existe un sous-espace vectoriel F de E , non trivial et non réduit à une droite, qui soit stable par D et sur lequel D agisse comme un projecteur, i.e. tel que

l'application $p : \begin{cases} F \rightarrow F \\ f \mapsto f' \end{cases}$ soit un projecteur.

5. Démontrer que si un tel F existe, alors $\forall f \in F$, $f'' = f'$. En déduire une base et la dimension de F .
6. Réciproquement, vérifier que le sous-espace vectoriel F défini précédemment est stable par D . Démontrer que l'application $p : \begin{cases} F \rightarrow F \\ u \mapsto u' \end{cases}$ est un projecteur, dont on précisera les espaces caractéristiques (sur quel espace se fait la projection, parallèlement à quoi?).
7. Déterminer, de même, l'existence éventuelle et la dimension d'un sous-espace vectoriel G de E , non trivial et non réduit à une droite, qui soit stable par D et sur lequel D agit comme une symétrie, i.e. tel que l'application $s : \begin{cases} G \rightarrow G \\ f \mapsto f' \end{cases}$ soit une symétrie. Préciser les espaces caractéristiques de la symétrie.

A-III. Non-existence de racine de D

On veut démontrer dans cette partie qu'il n'existe pas de « racine carrée » de D , i.e. de $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\Delta^2 = D$. On suppose par l'absurde que c'est le cas.

8. Démontrer que $\Delta \circ D = D \circ \Delta$ et en déduire que Δ stabilise $\mathbb{C}_1[X]$. On pourra remarquer que $\mathbb{C}_1[X]$ est le noyau d'une certaine puissance de D .
9. On définit $\delta : \begin{cases} \mathbb{C}_1[X] \rightarrow \mathbb{C}_1[X] \\ f \mapsto \Delta(f) \end{cases}$. En étudiant les dimensions de $\ker(\delta)$, $\ker(\delta^2)$, $\ker(\delta^3)$, $\ker(\delta^4)$, trouver une contradiction.

B. Équations différentielles et polynômes d'endomorphismes

B-I. Formalisation

Soit $\psi \in \mathcal{L}(E)$. On note toujours $\psi^k = \underbrace{\psi \circ \dots \circ \psi}_{k \text{ fois}}$, avec comme convention $\psi^0 = \text{Id}_E$.

Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ (avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$), on définit $P(\psi) = \sum_{k=0}^n a_k \psi^k$.

Attention à la nature des objets : $\psi^2(y)$ a un sens (c'est $\psi \circ \psi(y) = \psi(\psi(y))$) mais $\psi(y)^2$ n'a, a priori, pas du tout le même sens (voire pas de sens dans un espace vectoriel général) !

On admet que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2, (P + Q)(\psi) = P(\psi) + Q(\psi) \text{ et } (P \times Q)(\psi) = P(\psi) \circ Q(\psi)$$

On considère une équation différentielle à coefficients constants

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

d'inconnue $y \in E$, de coefficients $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{C}^{n+1}$, et $a_n \neq 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

10. Soit $y \in E$. Démontrer que

$$\mathcal{S} = \ker(P(D)) = \ker\left(\prod_{i=1}^s (D - \omega_i \text{Id}_E)^{m_i}\right),$$

où $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $(\omega_1, \dots, \omega_s)$ sont les racines de P , de multiplicités $m_1, \dots, m_s$.

En déduire que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E .

11. À titre d'exemple, donner le polynôme correspondant à l'équation $y'' - y = 0$. Préciser la forme factorisée de ce polynôme. Rappeler l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - y = 0$.

B-II. Un résultat de somme directe

Dans cette partie B-II., ψ est toujours dans $\mathcal{L}(E)$.

12. (Une mise en jambes) Démontrer que $\ker(\psi^2 - \text{Id}_E) = \ker(\psi - \text{Id}_E) \oplus \ker(\psi + \text{Id}_E)$.

13. Soient désormais P et Q deux polynômes premiers entre eux. Démontrer que

$$\ker((PQ)(\psi)) = \ker(P(\psi) \circ Q(\psi)) = \ker(P(\psi)) \oplus \ker(Q(\psi)).$$

On pourra démontrer l'existence de polynômes U et V tels que $U(\psi) \circ P(\psi) + V(\psi) \circ Q(\psi) = \text{Id}_E$.

14. Retrouver ainsi l'ensemble des solutions de $y'' - y = 0$.

Petit « rappel » de mercredi. Si A , B et C sont trois sev de E tels que $A \cap B = \{0_E\}$ et $(A \oplus B) \cap C = \{0_E\}$, alors $B \cap C = \{0_E\}$, $A \cap (B \oplus C) = \{0_E\}$, et

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) =_{\text{notation}} A \oplus B \oplus C.$$

On note, de même, pour $A_1, \dots, A_n$ n ensembles,

$$\bigoplus_{k=1}^n A_k = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n.$$

On admet que le caractère direct de la somme $A_1 + \dots + A_n$ s'exprime ainsi :

$$\forall x \in A_1 + \dots + A_n, \exists!(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n, x = a_1 + \dots + a_n.$$

Par récurrence immédiate, le résultat de la question 13. se généralise : si $P_1, \dots, P_r$ sont premiers entre eux deux à deux,

$$\ker((P_1 \times P_2 \times \dots \times P_r)(\psi)) = \ker(P_1(\psi) \circ \dots \circ P_r(\psi)) = \bigoplus_{k=1}^r \ker(P_k(\psi)).$$

B-III. Conclusion

On revient aux notations du début de la section B-I.

15. Conclure que $\mathcal{S} = \bigoplus_{i=1}^r \ker((D - \omega_i \text{Id}_E)^{m_i})$.

Notre but est alors de déterminer, pour un λ complexe et un r entier non nul, $\ker((D - \lambda \text{Id}_E)^r)$.

C. Un type d'équation particulier

Dans cette partie, on fixe un complexe λ . Si $r \in \mathbb{N}^*$, on note

$$K_{\lambda,r} = \ker((D - \lambda \text{Id}_E)^r),$$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $P_{\langle \lambda \rangle}$ la fonction $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$. On définit, si $r \in \mathbb{N}$,

$$F_{\lambda,r} = \{P_{\langle \lambda \rangle}, P \in \mathbb{C}_r[X]\}.$$

Notre but est de démontrer dans cette partie que pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, $K_{\lambda,r} = F_{\lambda,r-1}$.

16. Démontrer que pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, $F_{\lambda,r-1}$ est un sous-espace vectoriel de E inclus dans $K_{\lambda,r}$.

17. Démontrer que : $\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall u \in E$, si $v : x \mapsto u(x)e^{-\lambda x}$,

$$u \in \ker((D - \lambda \text{Id}_E)^r) \Leftrightarrow v \in \ker(D^r).$$

Conclure quant à l'égalité désirée.

18. Soit l'application $\varphi_{\lambda,r} : \begin{cases} \mathbb{C}_r[X] \rightarrow F_{\lambda,r} \\ P \mapsto P_{\langle \lambda \rangle} \end{cases}$. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels, et en déduire la dimension de $\ker((D - \lambda \text{Id}_E)^r)$.

D. Résolution dans le cas quelconque

19. À l'aide des parties précédentes, déterminer la dimension de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n . Préciser une base de l'ensemble de ces solutions.

20. À titre d'application, donner l'ensemble des solutions de l'équation :

$$y^{(4)} + y^{(3)} - 3y'' - y' + 2y = 0 \tag{1}$$