MPSI 1

Mathématiques
DS 08

Samedi 30 mars – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un « vrai ou faux » et d'un problème. Il est conseillé de passer le temps d'une interro (une vingtaine de minutes) sur le « vrai ou faux ».
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
Le soin apporté à la copie est un paramètre qui sera pris en compte dans l'évaluation.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. VRAI ou **FAUX** ? Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. Dans tous les cas, justifier précisément : par une preuve (si c'est une question de cours, redémontrer les choses).

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Correction

VRAI Déjà $0 \in F$ et $0 \in G$, donc $0 \in F \cap G$. Ensuite, si x et y sont dans $F \cap G$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

- $(x, y) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, donc $\lambda x + \mu y \in F$.
- $(x, y) \in G^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, donc $\lambda x + \mu y \in G$.

Donc $\lambda x + \mu y \in F \cap G$.
Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.

2. Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$ et $\ker(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$, alors u est surjective.

Correction

VRAI. Déjà, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ forme une famille libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, donc $\dim(\ker(u)) = 2$, donc, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\ker(u)) = 5 - 2 = 3$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3$, donc $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$ donc u est surjective.

3. Il existe une injection de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$.

Correction

FAUX. Par le théorème du rang, si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$, $\dim(\ker(u)) = \dim(\mathbb{R}^5) - \mathrm{rg}(u) = 5 - \mathrm{rg}(u) \geqslant 5 - 3 = 2$, donc u n'est pas injective.

4. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$.

Correction

FAUX. Si $\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, 0) \end{array} \right.$, alors $\ker(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}((1, 0))$.

5. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$, alors u vérifie $u \circ u = u$.

Correction

FAUX. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit $u(x, y) = (2x, 0)$. Alors $\ker(u) = \mathrm{Vect}((0, 1))$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((1, 0))$, donc $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$.

6. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $\ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u + \mathrm{Id}) = E$, alors u est une symétrie.

Correction

VRAI. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(u-\mathrm{Id})$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u+\mathrm{Id})$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, $u(e_i) = e_i$ donc $u \circ u(e_i) = e_i$, et pour tout i dans $[\![p + 1, n]\!]$, $u(e_i) = -e_i$ donc $u \circ u(e_i) = e_i$. Donc $u \circ u = \mathrm{Id}$ donc u est une symétrie.

Problème 1. Endomorphisme de dérivation et équations différentielles linéaires

Le but de ce problème est d'utiliser des outils d'algèbre linéaire pour étudier des équations différentielles à coefficients constants mais d'ordre quelconque.
La partie A. étudie les propriétés de l'endomorphisme de dérivation.
La partie B. fait le lien entre l'endomorphisme de dérivation et les équations différentielles via la notion de polynôme d'endomorphisme.
La partie C. permet de résoudre un certain type d'équations différentielles.
Enfin, la partie D. conclut le problème, en donnant la dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle et en regardant un exemple.

On note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Dans ce problème, on assimile polynôme et fonction polynomiale, si bien que l'on considèrera que $\mathbb{C}[X]$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
On note D l'endomorphisme de dérivation :

$$D : \left| \begin{array}{l} E \to E \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$$

A. L'endomorphisme D

A-I. Premières propriétés algébriques

1. Déterminer très rapidement $\ker(D)$ et $\mathrm{Im}(D)$.

Correction

- Déjà, $\ker(D) = \{f \in E,\ f' = 0\} = \mathbb{C}_0[X]$.
- Ensuite, soit $g \in E$ et f l'unique primitive de g s'annulant en 0. ALors $f' = g$, donc $g = D(f)$, donc $g \in \mathrm{Im}(f)$, donc f est surjective.

On note, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $D^k = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k \text{ fois}}$ et $D^0 = \mathrm{Id}_E$.

2. Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\ker(D^k) = \mathbb{C}_{k-1}[X]$.

Correction

On va procéder par récurrence.
Déjà, nous l'avons dit, $\ker(D) = \mathbb{C}_0[X]$.
Ensuite, soit k dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la proposition. Soit $f \in \ker(D^{k+1})$. Alors $f^{(k+1)} = 0$ donc $f' \in \ker(D^k) = \mathbb{C}_{k-1}[X]$, donc on dispose de $(a_1, \ldots, a_k)$ vérifiant

$$f : x \mapsto a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1}.$$

Soit, en primitivant,

$$f : x \mapsto f(0) + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_k}{k} x^k,$$

donc $f \in \mathbb{C}_k[X]$. Réciproquement, tout polynôme de degré k est bien nul, une fois dérivé $k+1$ fois.
D'où l'hérédité et le résultat !

Si ψ est un endomorphisme de E, et F est un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est stable par ψ si $\psi(F) \subset F$. On dit aussi que ψ stabilise F.

3. Vérifier que pour tout n, $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par D. Vérifier qu'il existe des sous-espaces vectoriels stricts de E stables par D qui ne soient pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[X]$.

Correction

- Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors $D(P) = P' \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \subset \mathbb{C}_n[X]$, donc $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par D.
- Si l'on considère $F = \mathrm{Vect}(\exp)$, alors, comme $D(\exp) = \exp$, F est stable par D et n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

4. On appelle D_n l'endomorphisme $D_n : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$. Déterminer $\ker(D_n)$ et $\mathrm{Im}(D_n)$. Préciser le rang de D_n.

Correction

- Déjà, $\ker(D_n) = \{P \in \mathbb{C}_n[X],\ D_n(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{C}_n[X],\ P' = 0\} = \mathbb{C}_0[X]$.
- Ensuite, si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $D_n(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ donc $\mathrm{Im}(D_n) \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
  Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, P admet une primitive dans $\mathbb{C}_n[X]$: si $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ convient. Donc $C_{n-1}[X] \subset \mathrm{Im}(D_n)$, donc $\mathrm{Im}(D_n) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
- On en déduit ainsi que $\mathrm{rg}(D_n) = \dim(\mathbb{C}_{n-1}[X]) = n$.

Les sous-sections A-II. et A-III. établissent des résultats indépendants du reste du problème.

A-II. D vu comme projecteur ou symétrie

On se demande dans cette partie s'il existe un sous-espace vectoriel F de E, non trivial et non réduit à une droite, qui soit stable par D et sur lequel D agisse comme un projecteur, i.e. tel que l'application $p : \left| \begin{array}{l} F \to F \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$ soit un projecteur.

5. Démontrer que si un tel F existe, alors $\forall f \in F,\ f'' = f'$. En déduire une base et la dimension de F.

Correction

- Supposons qu'il existe un sous-espace F de E stable par D tel que D agisse comme un projecteur sur F. Soit $f \in F$. Alors $D^2(f) = D(f)$. Donc $f'' = f'$.
- Or, si $f \in E$,

$$f'' = f' \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{C},\ f' = f + K \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{C}, \exists \lambda \in \mathbb{C},\ f = \lambda e^x - K.$$

  (cf. votre chapitre de résolution d'équations différentielles !) Ainsi, $F = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\} = \mathrm{Vect}(\exp, 1)$. Donc F est de dimension 2.

6. Réciproquement, vérifier que le sous-espace vectoriel F défini précédemment est stable par D. Démontrer que l'application $p : \left| \begin{array}{l} F \to F \\ u \mapsto u' \end{array} \right.$ est un projecteur, dont on précisera les espaces caractéristiques (sur quel espace se fait la projection, parallèlement à quoi ?).

Correction

(a) Si on pose $F = \mathrm{Vect}(\exp, 1)$, comme $D(\exp) = \exp$ et $D(1) = 0$, F est stable par D.

(b) On pose ensuite $p : \left| \begin{array}{l} F \to F \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$. Déjà, $D^2(\exp) = \exp = D(\exp)$ et $D^2(1) = 0 = D(1)$, donc pour toute f dans F, $D^2(f) = D(f)$.

(c) Enfin, on détermine

- $\ker(p)$: soit $f \in F$. $f \in \ker(p) \Leftrightarrow p(f) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathrm{Vect}(1)$.
- $\mathrm{Im}(p)$: soit $f \in F$. $f \in \mathrm{Im}(p) \Leftrightarrow p(f) = f \Leftrightarrow f' = f \Leftrightarrow f \in \mathrm{Vect}(\exp)$.

Ainsi, p est la projection sur $\mathrm{Vect}(\exp)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(1)$.

7. Déterminer, de même, l'existence éventuelle et la dimension d'un sous-espace vectoriel G de E, non trivial et non réduit à une droite, qui soit stable par D et sur lequel D agit comme une symétrie, i.e. tel que l'application $s : \left| \begin{array}{l} G \to G \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$ soit une symétrie. Préciser les espaces caractéristiques de la symétrie.

Correction

Faisons le même raisonnement que précédemment.

(a) S'il existe un sous-espace G de E stable par D tel que $s : \left| \begin{array}{l} G \to G \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$ soit une symétrie, alors pour toute f dans G, $D^2(f) = f$, donc $f'' = f$. Donc $f \in \mathrm{Vect}(\exp, \exp \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}))$.

(b) Réciproquement, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont bien stables par D. On définit donc $s : \left| \begin{array}{l} G \to G \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$. Comme $D^2(\exp) = \exp$ et $D^2(x \mapsto \mathrm{e}^{-x}) = x \mapsto -(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}$, on a bien, pour toute f dans G, $D^2(f) = f$.

(c) Finalement, on remarque que si $f \in G$,
- $f \in \ker(s - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow f' = f \Leftrightarrow f \in \mathrm{Vect}(\exp)$.
- $f \in \ker(s + \mathrm{Id}) \Leftrightarrow f' = -f \Leftrightarrow f \in \mathrm{Vect}(\exp \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}))$.

Ainsi, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\exp)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\exp \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}))$.

A-III. Non-existence de racine de D

On veut démontrer dans cette partie qu'il n'existe pas de « racine carrée » de D, i.e. de $\Delta \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\Delta^2 = D$. On suppose par l'absurde que c'est le cas.

8. Démontrer que $\Delta \circ D = D \circ \Delta$ et en déduire que Δ stabilise $\mathbb{C}_1[X]$. *On pourra remarquer que $\mathbb{C}_1[X]$ est le noyau d'une certaine puissance de D.*

Correction

On écrit $\Delta \circ D = \Delta \circ \Delta^2 = \Delta^2 \circ \Delta = D \circ \Delta$.
Ainsi, Δ commute avec D et donc avec D^2. Donc Δ stabilise $\ker(D^2) = \mathbb{C}_1[X]$. (si $D^2(f) = 0$, alors $D^2(\Delta(f)) = \Delta(D^2(f)) = \Delta(0) = 0$).

9. On définit $\delta : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_1[X] & \to & \mathbb{C}_1[X] \\ f & \mapsto & \Delta(f) \end{array} \right.$. En étudiant les dimensions de $\ker(\delta)$, $\ker(\delta^2)$, $\ker(\delta^3)$, $\ker(\delta^4)$, trouver une contradiction.

Correction

Soit $P \in \ker(\delta)$. Alors $\delta(P) = 0$ donc $\delta^2(P) = 0$, donc $\ker(\delta) \subset \ker(\delta^2)$. De même, $\ker(\delta^2) \subset \ker(\delta^3) \subset \ker(\delta^4)$.
Mais $\ker(\delta^2) = \{P \in \mathbb{C}_1[X],\ P' = 0\} = \mathbb{C}_0[X]$. Donc $\ker(\delta^2)$ est de dimension 1, alors que $\ker(\delta^0)$ est de dimension 0.

- si $\ker(\delta)$ est de dimension 0, alors δ est injective donc inversible, absurde, car δ^2 n'est pas inversible.
- sinon, $\ker(\delta)$ est de dimension 1. Inclus dans $\ker(\delta^2)$, on en déduit que $\ker(\delta) = \ker(\delta^2)$. Mais alors, si $P \in \ker(\delta^3)$, $\delta^3(P) = 0$, donc $\delta^2(\delta(P)) = 0$, donc $\delta(P) \in \ker(\delta^2) = \ker(\delta)$, donc $\delta^2(P) = 0$.
  Ainsi, $\ker(\delta) = \ker(\delta^2) = \ker(\delta^3) = \ker(\delta^4)$. Mais $\delta^4(P) = P''$, nul pour tout P dans $\mathbb{C}_1[X]$. Donc $\ker(\delta^4)$ est de dimension 2 (celle de $\mathbb{C}_1[X]$) et 1 (celle de $\ker(\delta^2)$). **ABSURDE !**

Donc Δ n'existe pas !

B. Équations différentielles et polynômes d'endomorphismes

B-I. Formalisation

Correction

Cette partie n'est là que pour introduire du vocabulaire : les questions ne rapportaient vraiment pas grand chose car il s'agissait plus ou moins de trivialités à réécrire.

Soit $\psi \in \mathscr{L}(E)$. On note toujours $\psi^k = \underbrace{\psi \circ \cdots \circ \psi}_{k \text{ fois}}$, avec comme convention $\psi^0 = \mathrm{Id}_E$.

Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$), on définit $P(\psi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \psi^k$.

Attention à la nature des objets : $\psi^2(y)$ a un sens (c'est $\psi \circ \psi(y) = \psi(\psi(y))$) mais $\psi(y)^2$ n'a, a priori, pas du tout le même sens (voire pas de sens dans un espace vectoriel général) !
On admet que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2,\ (P + Q)(\psi) = P(\psi) + Q(\psi) \text{ et } (P \times Q)(\psi) = P(\psi) \circ Q(\psi)$$

On considère une équation différentielle à coefficients constants

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

d'inconnue $y \in E$, de coefficients $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{C}^{n+1}$, et $a_n \neq 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

10. Soit $y \in E$. Démontrer que

$$\mathcal{S} = \ker(P(D)) = \ker\left(\prod_{i=1}^{s} (D - \omega_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}\right),$$

où $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $(\omega_1,\dots,\omega_s)$ sont les racines de P, de multiplicités $m_1,\dots,m_s$.
En déduire que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Correction

Raisonnons par équivalences :

$$y\in\mathcal{S} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}=0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k D^k(y)=0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\right)(y)=0 \Leftrightarrow P(D)(y)=0.$$

Ensuite, il s'agit d'une simple écriture des choses :

$$\mathcal{S}=\ker(P(D))=\ker\left(a_n\prod_{k=1}^{s}(D-\omega_i\mathrm{Id}_E)^{m_i}\right)=\ker\left(\prod_{k=1}^{s}(D-\omega_i\mathrm{Id}_E)^{m_i}\right),$$

qui est un sous-espace vectoriel de E car noyau d'une application linéaire.

11. À titre d'exemple, donner le polynôme correspondant à l'équation $y''-y=0$. Préciser la forme factorisée de ce polynôme. Rappeler l'ensemble des solutions de l'équation $y''-y=0$.

Correction

Le polynôme correspondant à $y''-y=0$ est X^2-1. C'est le polynôme de l'équation caractéristique ! Elle a deux solutions, 1 et -1, donc l'ensemble des solutions est

$$\{x\mapsto \lambda e^x+\mu e^{-x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\}=\mathrm{Vect}(\exp,\exp\circ(-\mathrm{Id})).$$

B-II. Un résultat de somme directe

Correction

Remarque : ce résultat s'appelle lemme des noyaux, vous en parlerez quand vous serez en spé ! Là, pour le coup, on démontre de vrais résultats, beaux et assez durs !

Dans cette partie B-II., ψ est toujours dans $\mathscr{L}(E)$.

12. (Une mise en jambes) Démontrer que $\ker(\psi^2-\mathrm{Id}_E)=\ker(\psi-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(\psi+\mathrm{Id}_E)$.

Correction

Il y a 3 choses à démontrer :

- l'inclusion de $\ker(\psi-\mathrm{Id}_E)+\ker(\psi+\mathrm{Id}_E)$ dans $\ker(\psi^2-\mathrm{Id}_E)$. Soit $y\in\ker(\psi-\mathrm{Id}_E)$. Alors $\psi(y)=y$ donc $\psi^2(y)=\psi(y)=y$ donc $y\in\ker(\psi^2-\mathrm{Id}_E)$.
  De même, si $y\in\ker(\psi-\mathrm{Id}_E)$, alors $\psi(y)=-y$ donc $\psi^2(y)=-\psi(y)=y$ donc $y\in\ker(\psi^2-\mathrm{Id}_E)$.

- l'égalité des deux espaces par analyse-synthèse (pas obligatoire l'analyse-synthèse !). Soit $f \in \ker(\psi^2 - \mathrm{Id}_E)$.
Analyse. Supposons que $f = g + h$ avec $g \in \ker(\psi - \mathrm{Id}_E)$ et $h \in \ker(\psi + \mathrm{Id}_E)$. Alors
$$\psi(f) = \psi(g) + \psi(h) = g - h.$$
Donc $g = \dfrac{f + \psi(f)}{2}$ et $h = \dfrac{f - \psi(f)}{2}$. D'où l'unicité éventuelle d'une décomposition.
Synthèse. Posons $g = \dfrac{f + \psi(f)}{2}$ et $h = \dfrac{f - \psi(f)}{2}$. Alors
— $\psi(g) = \dfrac{1}{2}(\psi(f) + \psi^2(f)) = \dfrac{1}{2}(\psi(f) + f)$ car $f \in \ker(\psi^2 - \mathrm{Id}_E)$. Donc $g \in \ker(\psi - \mathrm{Id}_E)$.
— $\psi(h) = \dfrac{1}{2}(\psi(f) - \psi^2(f)) = \dfrac{1}{2}(\psi(f) - f)$ car $f \in \ker(\psi^2 - \mathrm{Id}_E)$. Donc $g \in \ker(\psi + \mathrm{Id}_E)$.
— $g + h = f$.
D'où l'existence d'une décomposition et ainsi la supplémentarité.

13. Soient désormais P et Q deux polynômes premiers entre eux. Démontrer que
$$\ker((PQ)(\psi)) = \ker(P(\psi) \circ Q(\psi)) = \ker(P(\psi)) \oplus \ker(Q(\psi)).$$
On pourra démontrer l'existence de polynômes U et V tels que $U(\psi) \circ P(\psi) + V(\psi) \circ Q(\psi) = Id_E$.

Correction

Démontrons déjà l'indication : P et Q sont premiers entre eux donc on dispose de U et V tels que $UP + VQ = 1$. Ainsi, en évaluant les polynômes en ψ, $U(\psi) \circ P(\psi) + V(\psi) \circ Q(\psi) = \mathrm{Id}_E$.

Ensuite, il y a 3 choses à démontrer : une inclusion, une somme directe, une supplémentarité.

(a) Déjà, on montre que $\ker(P(\psi)) + \ker(Q(\psi)) \subset \ker((PQ)(\psi))$.
Soit $x \in \ker(P(\psi))$. Alors $P(\psi)(x) = 0$, donc $Q(\psi)(P(\psi)(x)) = 0$, donc $(PQ)(\psi)(x) = 0$. Donc $\ker(P(\psi)) \subset \ker((PQ)(\psi))$. De même pour $\ker(Q(\psi))$.

(b) Ensuite, l'analyse-synthèse n'est pas forcément immédiate. En revanche, si $x \in \ker(P(\psi)) \cap \ker(Q(\psi))$, alors en utilisant la relation de Bézout,
$$U(\psi) \circ P(\psi)(x) + V(\psi) \circ Q(\psi)(x) = x.$$
Mais $P(\psi)(x) = 0$ et $Q(\psi)(x) = 0$, donc $0 + 0 = x$, donc $x = 0$.

(c) Enfin, soit $x \in \ker((PQ)(\psi))$. Posons $y = U(\psi) \circ P(\psi)(x)$ et $z = U(\psi) \circ P(\psi)(x)$. Alors $x = y + z$ et
$$Q(\psi)(y) = (QUP)(\psi)(x) = U(\psi)\Big((QP)(\psi)(x)\Big) = U(\psi)(0) = 0,$$
de même pour $P(\psi)(z)$.

Donc $\ker((PQ)(\psi)) = \ker(P(\psi) \circ Q(\psi)) = \ker(P(\psi)) \oplus \ker(Q(\psi))$.

14. Retrouver ainsi l'ensemble des solutions de $y'' - y = 0$.

Correction

On remarque que si l'on pose $P = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, alors $\ker(P(D)) = \ker(D - \mathrm{Id}) \oplus \ker(D + \mathrm{Id})$ Mais $\ker(D - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(\exp)$ et $\ker(D + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(\exp \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}))$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est $\mathrm{Vect}(\exp) \oplus \mathrm{Vect}(\exp \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})) = \mathrm{Vect}(\exp, \exp \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}))$. On retrouve bien le résultat attendu !

Petit « rappel » de mercredi. Si A, B et C sont trois sev de E tels que $A \cap B = \{0_E\}$ et $(A \oplus B) \cap C = \{0_E\}$, alors $B \cap C = \{0_E\}$, $A \cap (B \oplus C) = \{0_E\}$, et
$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) =_{\text{notation}} A \oplus B \oplus C.$$
On note, de même, pour $A_1, \dots, A_n$ n ensembles,
$$\bigoplus_{k=1}^{n} A_k = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n.$$
On admet que le caractère direct de la somme $A_1 + \dots + A_n$ s'exprime ainsi :
$$\forall x \in A_1 + \dots + A_n,\ \exists!(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n,\ x = a_1 + \dots + a_n.$$
Par récurrence immédiate, le résultat de la question 13. se généralise : si $P_1, \dots, P_r$ sont premiers entre eux deux à deux,
$$\ker((P_1 \times P_2 \dots \times P_r)(\psi)) = \ker(P_1(\psi) \circ \dots \circ P_r(\psi)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker(P_k(\psi)).$$

B-III. Conclusion

On revient aux notations du début de la section B-I.

15. Conclure que que $\mathcal{S} = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker((D - \omega_i \mathrm{Id}_E)^{m_i})$.

Correction

On sait que $\mathcal{S} = \ker(P(D))$. Déjà, $\ker(u) = \ker(\lambda u)$ si λ est non nul, donc

$$\ker(P(D)) = \ker\left(\prod_{i=1}^{r}(D - \omega_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}\right).$$

Or, si $\omega_i \neq \omega_j$, $(X - \omega_i)^{m_i}$ et $(X - \omega_j)^{m_j}$ sont premiers entre eux (car ils ne partagent pas de racine en commun). Donc, d'après le lemme des noyaux,

$$\mathcal{S} = \ker(P(D)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker((D - \omega_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}).$$

D'où le résultat désiré !

Notre but est alors de déterminer, pour un λ complexe et un r entier non nul, $\ker((D - \lambda \mathrm{Id}_E)^r)$.

C. Un type d'équation particulier

Dans cette partie, on fixe un complexe λ. Si $r \in \mathbb{N}^*$, on note

$$K_{\lambda,r} = \ker((D - \lambda \mathrm{Id}_E)^r),$$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $P_{\langle\lambda\rangle}$ la fonction $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$. On définit, si $r \in \mathbb{N}$,

$$F_{\lambda,r} = \{P_{\langle\lambda\rangle},\ P \in \mathbb{C}_r[X]\}.$$

Notre but est de démontrer dans cette partie que pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, $K_{\lambda,r} = F_{\lambda,r-1}$.

16. Démontrer que pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, $F_{\lambda,r-1}$ est un sous-espace vectoriel de E inclus dans $K_{\lambda,r}$.

Correction

Soit$r$ dans $\mathbb{N}^*$.

- déjà, $0 \in F_{\lambda,r-1}$.
- ensuite, soient f et g dans $F_{\lambda,r-1}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors on dispose de P et Q dans $\mathbb{C}_{r-1}[X]$ tels que $f : x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$ et $g : x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$. Alors

  $$\alpha f + g : x \mapsto (\alpha P + Q)(x)e^{\lambda x},$$

  donc, comme $\alpha P + Q \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$, $\alpha f + g \in F_{\lambda,r-1}$.

- enfin (et c'était le point difficile !) soit $f \in F_{\lambda,r-1}$. Alors on dispose de $Q \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$ tel que $f : x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$. Mais alors

$$(D - \lambda\mathrm{Id})(f) : x \mapsto Q'(x)e^{\lambda x} + Q(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda Q(x)e^{\lambda x} = Q'(x)e^{\lambda x}$$

Donc $(D - \lambda\mathrm{Id})(f) \in F_{r-2,\lambda}$ car $Q' \in \mathbb{C}_{r-2}[X]$. Par récurrence immédiate, $(D - \lambda\mathrm{Id})^{r-1}(f) \in F_{0,\lambda}$, donc $(D - \lambda\mathrm{Id})^{r-1}(f) : x \mapsto Ke^{\lambda x}$, où $K \in \mathbb{C}$. Ainsi, $(D - \lambda\mathrm{Id})^{r}(f)$ est nulle ! Donc $f \in K_{\lambda,r}$.

17. Démontrer que : $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in E$, si $v : x \mapsto u(x)e^{-\lambda.x}$,

$$u \in \ker((D - \lambda\mathrm{Id}_E)^r) \Leftrightarrow v \in \ker(D^r).$$

Conclure quant à l'égalité désirée.

Correction

Notons $\mathcal{P}_r$ la proposition à démontrer. **Initialisation.** Pour $r = 1$. Soit $u \in E$, $v : x \mapsto u(x)e^{-\lambda.x}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \in \ker((D - \lambda\mathrm{Id}_E)) &\Leftrightarrow (D - \lambda\mathrm{Id}_E)(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow u' - \lambda u = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{C},\ u : x \mapsto Ce^{\lambda x} \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{C},\ v : x \mapsto K \\ &\Leftrightarrow v \in C_0[X] \Leftrightarrow v \in \ker(D). \end{aligned}$$

D'où l'initialisation.
Hérédité. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_r$ est vraie. Alors on a l'équivalence

$$u \in K_{\lambda,r+1} \Leftrightarrow (D - \lambda\mathrm{Id}_E)^{r+1}(u) = 0_E \Leftrightarrow (D - \lambda\mathrm{Id}_E)(u) \in K_{\lambda,r}.$$

Or, si $x \in \mathbb{R}$,

$$(D - \lambda\mathrm{Id}_E)(u)(x) = u'(x) - \lambda u(x) = \lambda e^{\lambda x}v(x) + e^{\lambda x}v'(x) - \lambda e^{\lambda x}v(x) = e^{\lambda x}v'(x).$$

Donc $u \in K_{\lambda,r+1}$ si, et seulement si $x \mapsto e^{\lambda x}v'(x)$ est dans $K_{\lambda,r}$, i.e., par hypothèse de récurrence, si et seulement si $v' \in \ker(D^r)$.
Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$u \in K_{\lambda,r} \Leftrightarrow v \in \ker(D^r) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{qu. 4}} v \in \mathbb{C}_{r-1}[X] \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{C}_{r-1}[X],\ u : x \mapsto P(x)e^{\lambda x} \Leftrightarrow u \in F_{\lambda,r}$$

18. Soit l'application $\varphi_{\lambda,r} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_r[X] & \to & F_{\lambda,r} \\ P & \mapsto & P_{\langle\lambda\rangle} \end{array} \right.$. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels, et en déduire la dimension de $\ker((D - \lambda\mathrm{Id}_E)^r)$.

Correction

- La linéarité est évidente : soient P et Q dans $\mathbb{C}_r[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$\varphi_{\lambda,r}(\lambda P+Q)(x) = (\lambda P+Q)(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = \alpha P(x)\mathrm{e}^{\lambda x} + Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = \alpha P_{\langle\lambda\rangle}(x) + Q_{\langle\lambda\rangle}(x).$$
- La surjectivité est claire : soit $f \in F_{\lambda,r}$. Alors on dispose de $P \in \mathbb{C}_r[X]$ tel que $f : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Alors $f = \varphi_{\lambda,r}(P)$.
- Pour l'injectivité, soient P et Q dans $\mathbb{C}_r[X]$ tels que $\varphi_{r,\lambda}(P) = \varphi_{r,\lambda}(Q)$. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$, donc $P(x) = Q(x)$, donc, par égalité sur un ensemble infini, $P = Q$.

Ainsi, $\varphi_{\lambda,r}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc $\dim(F_{\lambda,r}) = \dim(C_r[X]) = r+1$.

D. Résolution dans le cas quelconque

19. À l'aide des parties précédentes, déterminer la dimension de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n. Préciser une base de l'ensemble de ces solutions.

Correction

Soit $(\mathcal{E})$ une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n, $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions. Alors $\mathcal{S} = \ker(P(D))$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P) = n$. Alors :

- par la question 15., $\mathcal{S} = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker((D-\omega_i \mathrm{Id}_E)^{m_i})$, où $\omega_1, \dots, \omega_r$ sont les racines de P, de multiplicités $m_1, \dots, m_r$.
- par la question 18., $\ker((D-\omega_i\mathrm{Id}_E)^{m_i}$ est isomorphe à $\mathbb{C}_{m_i-1}[X]$, donc de dimension m_i.
- ainsi, $\dim(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{r} \dim(\ker((D-\omega_i\mathrm{Id}_E)^{m_i}) = \sum_{i=1}^{r} m_i = \deg(P)$.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n est donc de dimension n.
(c'est chouette comme résultat, non ?)

20. À titre d'application, donner l'ensemble des solutions de l'équation :
$$y^{(4)} + y^{(3)} - 3y'' - y' + 2y = 0 \tag{1}$$

Correction

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.
Notons $P(X) = X^4+X^3-3X^2-X+2$. Alors 1 est racine de P, $P(X) = (X-1)(X^3+2X^2-X-2)$. Mais 1 est racine de X^3+2X^2-X-2, donc $X^3+2X^2-X-2 = (X-1)(X^2+$

$3X+2)$. Mais $X^2+3X+2=(X+2)(X+1)$. Donc $P(X)=(X-1)^2(X+2)(X+1)$. Ainsi, par le Lemme des noyaux,

$$\mathcal{S}=\ker((D-\mathrm{Id})^2)\oplus\ker(D+2\mathrm{Id})\oplus\ker(D+\mathrm{Id}).$$

Mais, par la section précédente,

$$\begin{aligned}
&\ker((D-\mathrm{Id})^2)=\mathrm{Vect}(x\mapsto \mathrm{e}^x, x\mapsto x\mathrm{e}^x),\\
&\ker(D+2\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}(x\mapsto \mathrm{e}^{-2x}),\\
&\ker(D+\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}(x\mapsto \mathrm{e}^{-x})
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{S}=\left\{x\mapsto(\lambda+\mu x)\mathrm{e}^x+\nu\mathrm{e}^{-2x}+\xi\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda,\mu,\nu\xi)\in\mathbb{C}^4\right\}.$$