MPSI1 – Programme de colles
Semaine 01 – du 16 au 20 septembre 2024

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions doivent être introduites de manière progressive. Leur acquisition est un objectif pour la fin du premier semestre.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
b) Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- *calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;*
- *résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	

Première colle, attention à bien respecter les exigences de la colle (présentation, rédaction, interaction avec le colleur).

Poser essentiellement des exercices mettant en jeu :

— la théorie des ensembles (démonstration d'inclusions, équations avec des ensembles, etc.)

— les raisonnements classiques : analyse-synthèse, absurde, disjonction de cas, récurrenceS (classique, double, forte)

— des calculs de sommes ou de produits (avec coefficients binomiaux), de la manipulation du binôme ou de la formule de Bernoulli

Il est fondamental de vérifier que les élèves savent écrire correctement une démonstration, et notamment savent bien déclarer les variables, utiliser à bon escient des mots français.

Exemples de questions de cours

1. Règles de calcul ensembliste : énoncé, nommer les règles (associativité, double distributivité, neutre, élément absorbant, involutivité du complémentaire, etc.) et en prouver quelques unes par le calcul propositionnel.
2. Définir la proposition $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$. Nier cette proposition. Définir ce qu'est la contraposée. Démontrer, par contraposition, que si n est un entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.
3. Démontrer que tout entier admet un diviseur premier (par récurrence forte) + démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers (par l'absurde)
4. Démontrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
5. Déterminer les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, $f(m+n) = f(m)+f(n)$. Prolongements éventuels à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$.
6. Soit n un entier naturel. Donner les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} k$, de $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^3$ et démontrer l'un des 3 résultats énoncés (selon l'envie de la colleuse ou du colleur).
7. Calculer, à l'aide d'un changement d'indices, $\sum_{k=0}^{n} k$.
8. Coefficient binomial : définition et formules $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ainsi que $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.
9. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ par une méthode au choix.
10. Factorisation de $a^n - b^n$ (énoncé et démonstration) et de $a^n + b^n$ quand n est impair.
11. Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.