DM 02
à travailler en autonomie

Rappel. Le DM doit comporter votre nom, votre prénom, la formule choisie (écrite très clairement en début de DS), le temps passé, l'aide reçue/le travail en groupe. Je me réserve le droit de ne pas corriger le DM si l'une de ces informations vient à manquer.

Formules Je propose trois formules pour ce DM

- formule « bases » : faire l'ex. 1 ainsi que le Problème, questions 1,2,3. *Durée conseillée : 2h.*
- formule « intermédiaire » : faire l'ex. 1, le Problème, questions 1 à 6. *Durée conseillée : 3h.*
- formule « complète » : tout faire ! *Durée conseillée : 4h.*

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple (a_n, b_n) d'entiers relatifs tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, où (a_n, b_n) est le couple introduit à la question précédente.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_n^2 - 2b_n^2$?
4. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$.

Problème : nombres de Fibonacci et théorème de Zeckendorf

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On rappelle l'**unicité** d'une telle suite : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, alors pour tout entier naturel n, $v_n = F_n$.
On rappelle aussi le résultat suivant : toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.

NB. Pour beaucoup de questions de ce problème, une récurrence peut être tentante... Ce n'est pas toujours la solution la plus efficace !

A. Premières propriétés

On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Calculer $\dfrac{1}{\varphi}$ (on attend une forme sans racine au dénominateur) et vérifier que φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$ sont solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer la formule de Binet : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.
3. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
4. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $2^{n-1}F_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} 5^k$. *On pourra utiliser la formule de Binet.*

B. Représentation de Zeckendorf

5. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $F_n \geqslant n$. En déduire que pour tout entier naturel N non nul, il existe k dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $F_k \leqslant N < F_{k+1}$.

Notre but est de démontrer le théorème de Zeckendorf :

Théorème 1 (Zeckendorf)

Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique N dans $\mathbb{N}$, des entiers $k_1, \dots, k_N$ vérifiant $2 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ et, pour tout i dans $[\![1, N-1]\!]$, $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$, tels que

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_N}$$

En termes français, tout entier naturel non nul s'écrit de manière unique comme une somme de termes non consécutifs de la suite de Fibonacci.

On définit de cette manière la représentation ou décomposition de Zeckendorf d'un entier naturel non nul n. Pour faciliter la notation, on note $\overline{k_N k_{N-1} \dots k_1}^Z$ la représentation de Zeckendorf d'un entier n s'écrivant sous la forme $F_{k_1} + \cdots + F_{k_N}$.

Ainsi, $10 = 8 + 2 = F_6 + F_3$.

n =	6	5	4	3	2
F_n =	8	5	3	2	1
Explication de la décomposition	1	0	0	1	0

On note donc $10 = \overline{10010}^Z$. Remarque : même si $10 = 5 + 3 + 2 = F_5 + F_4 + F_3$, cette dernière décomposition n'est pas une décomposition de Zeckendorf, car les indices des termes de la suite ne sont pas consécutifs.

6. Dans cette question, on admet le théorème de Zeckendorf. Déterminer l'entier donc la décomposition de Zeckendorf est $\overline{101010}^Z$. Déterminer la décomposition de Zeckendorf de 17.

On arrête d'admettre le théorème de Zeckendorf.

7. Démontrer l'existence de la décomposition de Zeckendorf. On procèdera par récurrence forte, et on pourra utiliser la question 5..

8. Justifier que pour tous n et m dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $F_n = F_m \Rightarrow n = m$.

9. Démontrer que si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$F_n - 1 = \overline{101010\dots10}^Z \text{ ou } F_n - 1 = \overline{101010\dots01}^Z,$$

où l'écriture possède $n-2$ chiffres. Par exemple, $F_5 - 1 = F_4 + F_2 = \overline{101}^Z$, $F_6 - 1 = F_5 + F_3 = \overline{1010}^Z$, $F_7 - 1 = \overline{10101}^Z$.

10. Démontrer l'unicité de la décomposition de Zeckendorf.
Il est intéressant, pour montrer que deux uplets $(k_1, \dots, k_N)$ et $(\ell_1, \dots, \ell_M)$ sont égaux, de d'abord montrer que $k_N = \ell_M$.