DM 02
à travailler en autonomie

Rappel. Le DM doit comporter votre nom, votre prénom, la formule choisie (écrite très clairement en début de DS), le temps passé, l'aide reçue/le travail en groupe. Je me réserve le droit de ne pas corriger le DM si l'une de ces informations vient à manquer.

Formules Je propose trois formules pour ce DM

- formule « bases » : faire l'ex. 1 ainsi que le Problème, questions 1,2,3. *Durée conseillée : 2h.*
- formule « intermédiaire » : faire l'ex. 1, le Problème, questions 1 à 6. *Durée conseillée : 3h.*
- formule « complète » : tout faire ! *Durée conseillée : 4h.*

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple (a_n, b_n) d'entiers relatifs tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Correction

Interprétation. On voit que l'on a un $\forall n$, deux possibilités : on travaille à n fixé ou bien on fait une récurrence. Il se trouve que les deux étaient possibles, mais que le travail à n fixé (avec le binôme de Newton) n'était pas ce qui était attendu a priori (on n'avait encore pas vu le binôme de Newton)

Correction 1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2,\ (1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2} b_n. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Remarque : il était FONDAMENTAL de mettre le $\exists$ dans la proposition. Sinon, on ne savait pas qui étaient a_n et b_n. Il est aussi fondamental de mettre une phrase avant d'introduire $\mathcal{P}_n$.

Initialisation. On remarque que $(1+\sqrt{2})^n = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$. En **posant** $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, la proposition $\mathcal{P}_0$ est démontrée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors **on dispose de** $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2} b_n$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n \\ &= (1+\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2} b_n) \\ &= (a_n + 2b_n) + \sqrt{2} \times (a_n + b_n).\end{aligned}$$

En **posant** $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, l'hérédité est démontrée.

Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition est vraie pour tout n par le principe de récurrence.

Correction 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k \\ &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k \\ &= \sum_{0 \leqslant 2i \leqslant n} \binom{n}{2i} \sqrt{2}^{2i} + \sum_{0 \leqslant 2i+1 \leqslant n} \binom{n}{2i+1} \sqrt{2}^{2i+1} \\ &= \sum_{0 \leqslant 2i \leqslant n} \binom{n}{2i} 2^i + \sqrt{2} \sum_{0 \leqslant 2i+1 \leqslant n} \binom{n}{2i+1} 2^i.\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré en posant $a_n = \sum_{0 \leqslant 2i \leqslant n} \binom{n}{2i} 2^i$ et $b_n = \sum_{0 \leqslant 2i+1 \leqslant n} \binom{n}{2i+1} 2^i$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, où (a_n, b_n) est le couple introduit à la question précédente.

Correction

Interprétation. La question était **ambigüe**. Qui étaient a_n et b_n ? Clairement, s'il fallait faire exactement la même chose qu'au 1, je n'aurais pas posé la question... Il fallait comprendre que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la question 1 étaient désormais fixées, et que l'on travaillait **à partir de celles-ci**. J'ai beaucoup aimé les copies disant « On fixe désormais les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que définies dans la question 1 » .

Correction. Démontrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2} b_n. \qquad (\mathcal{Q}_n)$$

Initialisation. On remarque que

$$(1-\sqrt{2})^0 = 1 = 1 - \sqrt{2} \times 0 = a_0 - \sqrt{2} b_0.$$

L'initialisation est donc prouvée.
Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2})^{n+1} &= (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n \\ &= (1-\sqrt{2})(a_n - \sqrt{2} b_n) \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= (a_n + 2b_n) - \sqrt{2}(a_n + b_n) \\ &= a_{n+1} - \sqrt{2} b_{n+1} s\end{aligned}$$

D'où l'hérédité, **et le résultat !**

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_n^2 - 2b_n^2$?

Correction

Interprétation. Ici, n est fixé (pas besoin de le déclarer) et on a juste un petit calcul à faire !
Correction. On calcule

$$a_n^2-2b_n^2 = (a_n-\sqrt{2}b_n)(a_n+\sqrt{2}b_n) = (1-\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})^n = \left((1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\right)^n = \boxed{(-1)^n}.$$

4. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{m}+\sqrt{m-1}$.

Correction

Interprétation. Attention, il faudra déclarer n, et **poser** un certain m. Beaucoup de copies sont parties dans des choses trop complexes (avec des récurrences qui n'en étaient pas). Utilisez directement ce que vous avez vu précédemment !

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- si n est pair, alors $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$, donc $2b_n^2 = a_n^2 - 1$.
  Posons $m = a_n^2$. Alors
  $$(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n = \sqrt{a_n^2} + \sqrt{2b_n^2} = \sqrt{m} + \sqrt{m-1},$$
  d'où le résultat dans le cas où n est pair.
- si n est impair, alors $a_n^2 - 2b_n^2 = -1$, donc $a_n^2 = 2b_n^2 - 1$. Posons $m = 2b_n^2$. Alors
  $$(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n = \sqrt{a_n^2} + \sqrt{2b_n^2} = \sqrt{m-1} + \sqrt{m},$$
  d'où le résultat lorsque n est impair.

Problème : nombres de Fibonacci et théorème de Zeckendorf

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n$.
On rappelle l'**unicité** d'une telle suite : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, alors pour tout entier naturel n, $v_n = F_n$.
On rappelle aussi le résultat suivant : toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.

NB. Pour beaucoup de questions de ce problème, une récurrence peut être tentante... Ce n'est pas toujours la solution la plus efficace !

A. Premières propriétés

On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Calculer $\dfrac{1}{\varphi}$ (on attend une forme sans racine au dénominateur) et vérifier que φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$ sont solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Correction

On remarque d'abord que

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On remarque alors que l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a pour discriminant $1 + 4 = 5$, d'où deux solutions,

$$\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}.}$$

2. Démontrer la formule de Binet : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Correction

On démontre par récurrence double que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_n : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).$$

Initialisation. On remarque que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^0 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = F_0,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

D'où l'initialisation.
Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right) \text{ par hypothèse de récurence} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n(1+\varphi) - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\left(1-\frac{1}{\varphi}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, $1+\varphi = \varphi^2$ et $1 - \frac{1}{\varphi} = \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2$, d'où

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+2}\right),$$

d'où l'hérédité, **et le résultat** par le principe de récurrence !

3. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

Correction

On pourrait faire une récurrence... mais on peut procéder ainsi. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} F_k &= \sum_{k=1}^{n} F_{k+2} - F_{k+1} \\
&= F_{n+2} - F_2 \text{ par télescopage} \\
&= F_{n+2} - 1.
\end{aligned}$$

4. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $2^{n-1}F_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} 5^k$. *On pourra utiliser la formule de Binet.*

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $n \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}
2^{n-1}F_n &= 2^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \\
&= 2^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left(\sqrt{5}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k\left(1-(-1)^k\right)
\end{aligned}$$

Or, $1-(-1)^k = 0$ si k est pair, et $1-(-1)^k = 2$ si k est impair. Ainsi,

$$\begin{aligned}
2^{n-1}F_n &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k \times 2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{0\leqslant 2\ell+1\leqslant n}\binom{n}{2\ell+1}\sqrt{5}^{2\ell+1} \\
&= \sum_{0\leqslant 2\ell+1\leqslant n}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell}.
\end{aligned}$$

B. Représentation de Zeckendorf

5. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $F_n \geqslant n$. En déduire que pour tout entier naturel N non nul, il existe k dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que $F_k \leqslant N < F_{k+1}$.

Correction

On démontre par récurrence double que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: $F_n \geqslant n$. **Initialisation.** L'initialisation est évidente car $F_5 = 5 \geqslant 5$.
Hérédité Soit $n \geqslant 5$ tel que $F_n \geqslant n$ et $F_{n+1} \geqslant n+1$. Alors $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n = n+1+n \geqslant n+2$ car $n \geqslant 5$. D'où l'hérédité et le résultat !
Soit $N \in \mathbb{N}$. Considérons alors

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ F_n \leqslant N\}$$

La partie A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car $F_2 \leqslant N$), ou $F_5 \geqslant N$ si $N \leqslant 5$), majorée par N car $F_N \geqslant N$ (ou par 5 si $n \leqslant 5$), et, pour tout $n \geqslant N$, $F_n \geqslant N$.
Elle admet donc un plus grand élément k. Ainsi, $F_k \leqslant N$ et $F_{k+1} > N$.

Notre but est de démontrer le théorème de Zeckendorf :

Théorème 1 (Zeckendorf)

Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique N dans $\mathbb{N}$, des entiers $k_1, \ldots, k_N$ vérifiant

$2 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ et, pour tout i dans $[\![1, N-1]\!]$, $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$, tels que

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_N}$$

En termes français, tout entier naturel non nul s'écrit de manière unique comme une somme de termes non consécutifs de la suite de Fibonacci.

On définit de cette manière la représentation ou décomposition de Zeckendorf d'un entier naturel non nul n. Pour faciliter la notation, on note $\overline{k_N k_{N-1} \dots k_1}^Z$ la représentation de Zeckendorf d'un entier n s'écrivant sous la forme $F_{k_1} + \cdots + F_{k_N}$.

Ainsi, $10 = 8 + 2 = F_6 + F_3$.

n =	6	5	4	3	2
F_n =	8	5	3	2	1
Explication de la décomposition	1	0	0	1	0

On note donc $10 = \overline{10010}^Z$. Remarque : même si $10 = 5 + 3 + 2 = F_5 + F_4 + F_3$, cette dernière décomposition n'est pas une décomposition de Zeckendorf, car les indices des termes de la suite ne sont pas consécutifs.

6. Dans cette question, on admet le théorème de Zeckendorf. Déterminer l'entier donc la décomposition de Zeckendorf est $\overline{101010}^Z$. Déterminer la décomposition de Zeckendorf de 17.

Correction

Là, il s'agit juste d'une petite question destinée à se mettre en confiance.
Déjà,

$$\boxed{\overline{101010}^Z = F_7 + F_5 + F_3 = 13 + 5 + 2 = 20}.$$

Ensuite, on remarque que $17 = 13 + 3 + 1 = F_7 + F_4 + F_2 = \boxed{\overline{100101}^Z}$.

On arrête d'admettre le théorème de Zeckendorf.

7. Démontrer l'existence de la décomposition de Zeckendorf. On procèdera par récurrence forte, et on pourra utiliser la question 5..

Correction

Démontrons par récurrence forte que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $(\mathcal{P}_n)$: il existe un entier N dans $\mathbb{N}$, des entiers $k_1, \dots, k_N$ vérifiant $2 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ et $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$ (pour tout i dans $[\![1, N-1]\!]$), tels que

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_N}$$

L'**initialisation** est claire. Pour $n = 1$, $n = F_2$.
Pour l'**hérédité**, soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_{n-1}$.
Soit k l'unique entier tel que $F_k \leqslant n < F_{k+1}$. Alors :

- ou bien $n = F_k$, et on a déjà une représentation de Zeckendorf,

- ou bien $n - F_k$ est un entier de $[\![1, n-1]\!]$, donc, par hypothèse de récurrence, on dispose de N dans $\mathbb{N}$, des entiers $k_1, \dots, k_N$ vérifiant $2 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ et $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$ (pour tout i dans $[\![1, N-1]\!]$), tels que

$$n - F_k = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_N}$$

Mais, $n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$. Donc $F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_N} < F_{k-1}$. En particulier, $F_{k_N} < F_{k-1}$, donc $k_N < k - 1$. Ainsi, $k - k_N \geqslant 2$.

Ceci conclut l'hérédité, et prouve le résultat !

8. Justifier que pour tous n et m dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $F_n = F_m \Rightarrow n = m$.

Correction

On remarque qu'à partir du rang 2, la suite $(F_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}$ est strictement croissante. Cela permet de conclure directement, par contraposée : soit $(n, m) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2$ tel que $n \neq m$.
Si $n < m$, alors $F_n < F_m$; si $n > m$, alors $F_n > F_m$. Ainsi, dans tous les cas, $F_n \neq F_m$.

9. Démontrer que si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$F_n - 1 = \overline{101010\ldots10}^Z \text{ ou } F_n - 1 = \overline{101010\ldots01}^Z,$$

où l'écriture possède $n-2$ chiffres. Par exemple, $F_5 - 1 = F_4 + F_2 = \overline{101}^Z$, $F_6 - 1 = F_5 + F_3 = \overline{1010}^Z$, $F_7 - 1 = \overline{10101}^Z$.

Correction

On veut en fait démontrer que

$$F_n - 1 = F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \dots$$

Cette propriété se démontre très facilement par récurrence. La propriété que l'on (ne) va (pas) démontrer est

$$\mathcal{P}_k \;\; F_{2k} - 1 = F_{2k-1} + F_{2k-3} + \cdots + F_3 \text{ et } F_{2k+1} - 1 = F_{2k} + F_{2k-2} + \cdots + F_2.$$

L'initialisation est évidente et l'hérédité est immédiate. Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$, alors la décomposition de Zeckendorf de $F_n - 1$ est une alternance de 1 et de 0.

10. Démontrer l'unicité de la décomposition de Zeckendorf.
Il est intéressant, pour montrer que deux uplets $(k_1, \dots, k_N)$ et $(\ell_1, \dots, \ell_M)$ sont égaux, de d'abord montrer que $k_N = \ell_M$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe N et M deux entiers naturels, deux uplets $(k_1, \dots, k_N)$ et $(\ell_1, \dots, \ell_M)$ tels que

$$n = \sum_{i=1}^{N} F_{k_i} = \sum_{j=1}^{M} F_{\ell_j},$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

que pour tout i dans $[\![1, N-1]\!]$, $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$, et que pour tout j dans $[\![1, M-1]\!]$, $\ell_{j+1} - \ell_j \geqslant 2$.

- déjà, $k_N = \ell_M$. En effet,

$$\sum_{i=1}^{N} F_{k_i} \leqslant F_{k_N} + F_{k_N - 2} + F_{k_N - 4} + \cdots = F_{k_N + 1} - 1$$

  et, si on avait $k_N < \ell_M$, alors on aurait

$$\sum_{j=1}^{M} F_{\ell_j} \geqslant F_{\ell_M} \geqslant F_{k_N + 1},$$

  ce qui empêche l'égalité entre les deux écritures de n. $\boxed{\text{Donc } k_N = \ell_M.}$

- On a donc, par égalité des deux derniers termes,

$$\sum_{i=1}^{N-1} F_{k_i} = \sum_{j=1}^{M-1} F_{\ell_j}.$$

  Si l'une des deux sommes est nulle et l'autre non, c'est absurde, on ne peut pas avoir l'égalité ! Sinon, on montre que $F_{k_{N-1}} = F_{\ell_{M-1}}$ de la même manière que précédemment.

- On poursuit ainsi par une récurrence que je ne vais pas détailler là, étant donné qu'il s'agit de la dernière question du sujet !