DM 03
à rendre le lundi 30 septembre

Minimum vital. Exercice 1, Exercice 2, Problème 2 questions 1-6.
Durée conseillée. Pour le minimum conseillé, pas plus de 3h.
Reste du problème + exo bonus. Très intéressant, prenez le temps que vous voulez ;) L'exo bonus permet de parler d'inégalité triangulaire.

Exercice 1.

1. Soit θ dans $\mathbb{R}$. Déterminer une expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. Démontrer que $\cos\dfrac{\pi}{9}$ est racine d'une équation de degré 3 à coefficients entiers.
3. En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{9}$ est irrationnel.

Exercice 2. *Paramétrisation de Cayley*. Pour tout réel t, on définit le complexe

$$C(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}.$$

1. Démontrer que pour tout t réel, $C(t)$ appartient à $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$, où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On définit, pour tout ω de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$, la quantité

$$H(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathfrak{Re}(\omega)}{\mathfrak{Im}(\omega)} \text{ si } \omega \neq 1, \\ 0 \text{ si } \omega = 1 \end{cases}$$

2. Démontrer que pour tout ω dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$,

$$H(\omega) = \frac{\mathfrak{Im}(\omega)}{1+\mathfrak{Re}(\omega)}.$$

3. Démontrer que

$$\forall \omega \in \mathbb{U} \setminus \{-1\},\ \forall t \in \mathbb{R},\ C(t) = \omega \Leftrightarrow t = H(\omega).$$

On dit que H est la bijection réciproque de C.

Exercice 3. *Bonus*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leqslant 1$.
On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_{n+1} - v_n| \leqslant \dfrac{1}{2}$

Problème 1. Sommes exponentielles et isopérimétrie

Dans tout ce problème,

- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3,
- ω est le nombre complexe égal à $\boxed{e^{\frac{2i\pi}{n}}}$

Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés fondamentalement liées à ω, et notamment d'étudier ce que l'on appelle transformée de Fourier discrète associée à un n-uplet de complexes. La finalité de ces études est l'établissement d'inégalités dites « isopérimétriques », inégalités fondamentales en géométrie, qui expliquent pourquoi les polygones réguliers sont les formes les plus naturelles. Les résultats de la partie A. seront utiles pour les parties suivantes, et la partie B. peut être utilisée dans la dernière partie. Dans la plupart des cas, les résultats à utiliser sont donnés.

A. Préliminaires

A-I. Question préliminaire

1. Soit p un entier naturel entre 0 et $n-1$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq 0 \\ n \text{ si } p = 0. \end{cases}$$

A-II. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k^2\right).$$

On note

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2,\ B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^2,\ C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k.$$

On suppose que $A \neq 0$, c'est-à-dire que $(a_0, \dots, a_{n-1})$ ne sont pas tous nuls.

2. Soit x un réel. Développer $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a_k x + b_k)^2$ et l'écrire en fonction de A, B et C.

3. Déduire de l'étude du signe de la fonction f l'inégalité désirée.

4. Démontrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ b_k = \lambda a_k.$$

B. Transformée de Fourier discrète

Soit $U = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On définit la transformée de Fourier discrète de U, notée $\mathcal{F}(U)$, par $\mathcal{F}(U) = (v_0, \dots, v_{n-1})$, où

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!],\ v_\ell = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{\omega}^\ell)^k u_k.$$

On remarquera en particulier que $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

5. Dans le cas où pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $u_k = \dbinom{n-1}{k}$, que valent $(v_0, \dots, v_{n-1})$?

6. Démontrer, **dans le cas général** (i.e. sans supposer que $u_k = \binom{n-1}{k}$), que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ u_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\omega^k)^\ell v_\ell.$$

On pourra utiliser la question 1.
Cette formule est appelée formule d'inversion de Fourier.

C. Inégalités isopérimétriques pour les polygones

Soit $Z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On dira dans cette partie que Z est un *polygone* à n côtés est un n-uplet. On note $z_n = z_0$.
Les *côtés* du polygone sont les segments reliant les points d'affixe z_i et z_{i+1}.
Enfin, on note $\overline{Z} = (\overline{z_0}, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_{n-1}})$ et, si $c \in \mathbb{C}$, $Z + c = (z_0 + c, z_1 + c, \dots, z_{n-1} + c)$.

C-I. Généralités

7. Représenter le polygone $Z_1 = (1, j, j^2)$, le polygone $Z_2 = (1, i, -1, -i)$.

Quelques définitions seront utiles pour la suite :

- Le polygone Z est dit *équilatéral* si tous ses côtés sont de même longueur, i.e.

$$\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ |z_{i+2} - z_{i+1}| = |z_{i+1} - z_i|.$$

- Le polygone Z est dit *régulier* s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\Big(\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\omega^k + b\Big) \text{ ou } \Big(\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\overline{\omega}^k + b\Big).$$

- On appelle polygone régulier élémentaire à n côtés le polygone noté R_n et défini par

$$R_n = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}).$$

Remarque. Lorsqu'on manipulera un polygone régulier, on n'hésitera pas à se placer dans le cas où $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k = a\omega^k + b$, et à dire « de même » dans l'autre cas (si la démonstration est vraiment « de même »).

8. Démontrer que si Z est un polygone régulier, Z est l'image de R_n ou de $\overline{R_n}$ par une transformation géométrique dont on précisera les caractéristiques.

9. Démontrer que si Z est un polygone régulier, alors Z est équilatéral, et dessiner un contre-exemple montrant que la réciproque est fausse.

On définit finalement les quantités suivantes liées au polygone Z :

$$\mathcal{P}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|,\ \mathcal{E}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \text{ et } \mathcal{A}(Z) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k}\right).$$

La quantité $\mathcal{E}(Z)$ est appelée énergie du polygone et la quantité $\mathcal{A}(Z)$ est l'aire du polygone.

10. À quoi correspond, géométriquement, la quantité $\mathcal{P}(Z)$?

11. Exprimer $\mathcal{A}(\overline{Z})$ en fonction de $\mathcal{A}(Z)$, $\mathcal{E}(\overline{Z})$ en fonction de $\mathcal{E}(Z)$.

C-II. Le cas des polygones réguliers

Dans cette partie, on considère que Z est un polygone régulier.

12. Calculer $\mathcal{P}(Z)$, $\mathcal{E}(Z)$ et $|\mathcal{A}(Z)|$.

13. En déduire que
$$\frac{\mathcal{P}(Z)^2}{\mathcal{E}(Z)} = n, \text{ et que } \frac{|\mathcal{A}(Z)|}{\mathcal{E}(Z)} = \frac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

C-III. Première inégalité isopérimétrique

Dans cette partie, Z est à nouveau un polygone quelconque.

14. Montrer que $\mathcal{P}(Z)^2 \leqslant n\mathcal{E}(Z)$.

15. Déterminer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si Z est équilatéral.

C-IV. Seconde inégalité isopérimétrique

Cette partie, plus délicate en termes de calculs, est à traiter en dernier.
Dans cette partie, Z est toujours un polygone quelconque.
On note $\mathcal{F}(Z) = (y_0, \dots, y_{n-1})$ sa transformée de Fourier.

16. (*) Démontrer que
$$\mathcal{A}(Z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)|y_k|^2 \text{ et } \mathcal{E}(Z) = 4\sum_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)|y_k|^2.$$

On aura intérêt à utiliser la formule d'inversion de Fourier, et, lorsqu'on rencontre un produit $z_i z_j$, à écrire un seul des deux termes à l'aide de cette formule.

17. Démontrer que
$$\mathcal{E}(Z) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathcal{A}(Z) = 4\sum_{\ell=2}^{n-1}\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)\right)|y_\ell|^2.$$

18. En déduire que $\dfrac{|\mathcal{A}(Z)|}{\mathcal{E}(Z)} \leqslant \dfrac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, avec égalité ssi Z est régulier non réduit à un point.