Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(n-k)$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$,
$$k^2(n-k) = k^2 n - k^3$$
$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) n - \sum_{k=1}^{n} k^3$$
$$= \alpha - \beta$$

où
$$\alpha = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)}{2} \cdot \frac{(2n+1) \times 2}{3 \times 2}$$

$$\beta = \frac{n^2(n+1)}{4} \times (n+1) = \frac{n^2(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+1) \times 3}{2 \times 3}$$

$$S_n = \frac{n^2(n+1)}{12}(4n+2-3n-3)$$
$$\boxed{S_n = \frac{n^2(n^2-1)}{12}}$$

On vérifie $S_1 = 0$ ; $S_2 = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}}$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2}{4}\right)^k - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$T_n = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^n} - 3 + 3\cdot\frac{3^n}{4^n}\right)$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}}$$

On vérifie $T_1 = \frac{-1}{16}$ ; $T_2 = \frac{-9}{64}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$U_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right)$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2} = \frac{(k+1)^2}{k^2}$$

$$U_n = \frac{(n+1)^2}{1^2} = \boxed{(n+1)^2}$$

On vérifie $U_1 = 4$ ; $U_2 = 9$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$A_n = \sum_{1 \le i,j \le n} \max(i,j)$$

Tableau de valeurs de $(i,j) \mapsto \max(i,j)$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | $\dots$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | $\dots$ | $n$ |
| 2 | 2 | 2 | 3 | | $n$ |
| 3 | 3 | 3 | 3 | | $n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | $\ddots$ | $n$ |
| $n$ | $n$ | $n$ | $n$ | $n$ | $n$ |

$$A_n = \sum_{v=1}^{n} v \times (2(v-1)+1)$$

Pour $v \in [\![1,n]\!]$

$$v(2(v-1)+1) = 2v^2 - v$$

$$A_n = 2\left(\sum_{v=1}^{n} v^2\right) - \sum_{v=1}^{n} v$$

$$= 2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)\left(\frac{4n+2-3}{2\cdot 3}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

On vérifie

$A_1 = 1$ ; $A_2 = 7$

Aussi :

$$A_n = \sum_{v=1}^{n} \sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ \max(i,j)=v}} \max(i,j)$$

$$= \sum_{v=1}^{n} v \,\mathrm{Card}\{(i,j) : \max(i,j)=v\}$$

$$= \sum_{v=1}^{n} v(2v-1)$$

Aussi :

$$A_n = \sum_{i<j} + \sum_{i=j} + \sum_{i>j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i + 2\sum_{1 \le i < j \le n} j$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} j$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1)$$

Pour $j \in [\![1,n]\!]$

$$3j(j-1) = (j+1)j(j-1) - j(j-1)(j-2)$$

$$A_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{3}\left((n+1)n(n-1) - 0\right)$$

$$= n(n+1)\left(\frac{3}{6} + \frac{4n-4}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$B_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$$

Tableau de valeurs de $(i,j) \longmapsto \frac{i}{j}$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | ... | $\frac{1}{n}$ |
| 2 | | | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | ... | $\frac{2}{n}$ |
| 3 | | | | $\frac{3}{4}$ | ... | $\frac{3}{n}$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $n-1$ | | | | | | $\frac{n-1}{n}$ |

$$B_n = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j}$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \cdot \frac{j(j-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} (j-1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k \quad (j-1)_{j=1} = 0$$

$$\boxed{= \frac{n(n-1)}{4}}$$

On vérifie $B_1 = 0$ ; $B_2 = \frac{1}{2}$

Aussi :

Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

Si $k = 1$ alors $B_k = 0$ ;

Sinon,

$$B_k = \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} \frac{i}{j} + \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{i}{k}$$

$$= B_{k-1} + \frac{1}{k} \frac{k(k-1)}{2}$$

$$= B_{k-1} + \frac{k-1}{2}$$

$$B_k - B_{k-1} = \frac{k-1}{2}$$

$$= \frac{k(k-1)}{4} - \frac{(k-1)(k-2)}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (B_k - B_{k-1}) = \frac{n(n-1)}{4}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$S_n = \prod_{1 \leq i,j \leq n} ij \;,\quad T_n = \prod_{i \neq j} ij \;,\quad U_n = \prod_{i \leq j} ij \;,$$

$$V_n = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij \;,\quad W_n = \prod_{i < j} ij \;,\quad X_n = \prod_{j < i} ij$$

Tableau de valeurs de $(i,j) \longmapsto ij$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1\cdot1$ | $1\cdot2$ | $1\cdot3$ | ... | $1\cdot n$ |
| 2 | $2\cdot1$ | $2\cdot2$ | $2\cdot3$ | | $2\cdot n$ |
| 3 | $3\cdot1$ | $3\cdot2$ | $3\cdot3$ | | $3\cdot n$ |
| $\vdots$ | | | | | $\vdots$ |
| n | $n\cdot1$ | $n\cdot2$ | $n\cdot3$ | ... | $n\cdot n$ |

$$S_n = \left(\prod_{1 \leq i,j \leq n} i\right)\left(\prod_{1 \leq i,j \leq n} j\right)$$

$$= (n!)^n (n!)^n$$

$$= (n!)^{2n}$$

$$T_n = \frac{S_n}{(n!)^2} = (n!)^{2(n-1)}$$

$$W_n = X_n = \sqrt{T_n} = (n!)^{n-1}$$

$$U_n = V_n = W_n \cdot (n!)^2 = (n!)^{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \; ; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $R_n$ | 1 | 4 | 12 |
| $S_n$ | 1 | 6 | 24 |

$$1\cdot\binom{2}{1} + 2\cdot\binom{2}{2} = 4$$

$$1^2\binom{2}{1} + + 2^2\binom{2}{2} = 6$$

Supposons $n \geq 2$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2}$$

Et cela vaut aussi pour $k = 1$.

Ainsi,

- $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$
$$= n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell} 1^{n-1-\ell} 1^{\ell}$$
$$= n\,(1+1)^{n-1}$$
$$\boxed{= n2^{n-1}}$$

- $$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$
$$= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$
$$\boxed{= n(n-1)\,2^{n-2}}$$

Or pour ~~pour~~ $k \in [\![1, n]\!]$

$$k\cdot 1 + k\cdot(k-1) = k^2$$

D'où

$$\boxed{R_n = n2^{n-1}}$$

$$S_n = n2^{n-2}(2 + n - 1)$$

$$\boxed{S_n = n(n+1)\,2^{n-2}}$$

Et cela vaut aussi pour $n = 1$ ; donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On vérifie que ces formules respectent la table de valeurs ci-haut.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

Posons
$$S_{n,p} := \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Table de valeurs de $\binom{n}{k}$

| $n \backslash k$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 |

Table de valeur de $S_{n,p}$

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | |
| 2 | 1 | -1 | 0 | | |
| 3 | 1 | -2 | 1 | 0 | |

$$S_{n,p} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^p \binom{n}{p}$$

Et

| $n \backslash k$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

;

| $n \backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | -3 | 3 | -1 | 0 |

Il semble que $S_{n,p} = \begin{cases} (-1)^p \binom{n-1}{p} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = p = 0 \end{cases}$ ,,

Pour $q \in \mathbb{N}$, on pose

$\mathcal{P}(q)$ : " $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq q \Rightarrow S_{m,q} = \begin{cases} (-1)^q \binom{m-1}{q} & \text{si } m \geq \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases}$

(1) $\mathcal{P}(0)$

(2) Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(q)$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq q+1$

$$S_{m,q+1} = S_{m,q} + (-1)^{q+1} \binom{m}{q+1} = (-1)^{q+1} \left( \binom{m}{q+1} - \binom{m-1}{q} \right)$$

car $\mathcal{P}(q)$ et $m \geq 1$ et $m \geq q$.

Donc $S_{m,q+1} = (-1)^{q+1} \binom{m-1}{q+1}$

(3) D'où $\forall q \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq q \Rightarrow S_{m,q} = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$

$\boxed{\text{Aussi}}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, $(-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \left( \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) = (-1)^k \binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1}$

↳ Téléscopage si $n \geq 1$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On veut discuter des solutions du système

$$(S) : \begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda x - \mu y = 0 \\ \mu x + \lambda y = \mu \end{cases}$$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

$$(S) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mu L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - y = 1 \\ (\lambda - \mu) y = -\lambda \\ (\lambda + \mu) y = 0 \end{cases}$$

Discutons.

Cas 1 : $\mu \neq \lambda$.
Alors $\lambda - \mu \neq 0$.

$$(S) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - y = 1 \\ (\lambda - \mu) y = -\lambda \\ 0 = \dfrac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda - \mu} \end{cases}$$

Cas 1.1 : $\mu \neq -\lambda$ et $\lambda \neq 0$

Alors $0 \neq \dfrac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda-\mu}$.

Il n'y a pas de solution. Réponse : $\emptyset$.

Cas 1.2 : $\mu = -\lambda$ et $\lambda \neq 0$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2\lambda y = -\lambda \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Réponse : $\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Cas 1.3 : $\mu \neq -\lambda$ et $\lambda = 0$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -\mu y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Réponse : $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Cas 1.4 : $\mu = -\lambda$ et $\lambda = 0$

Alors $(S) \iff x - y = 1$

$\iff \exists t \in \mathbb{R} \, / \begin{cases} x - y = 1 \\ y = t \end{cases}$

$\iff \exists t \in \mathbb{R} \, / \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \end{cases}$

Réponse : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

Cas 2 : $\mu = \lambda$

$(S) \iff \begin{cases} x - y = 1 \\ 0 = -\lambda \\ 2\lambda y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 1 \\ 2\lambda y = 0 \\ 0 = -\lambda \end{cases}$

Cas 2.1 : $\lambda \neq 0$

Alors $0 \neq -\lambda$.

Réponse : $\emptyset$

Cas 2.2 : $\lambda = 0$

Réponse : Comme au cas 1.4

Bilan des Réponses :

- $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ si $\lambda = \mu = 0$
- $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ si $\lambda = 0, \mu \neq 0$
- $\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ si $\lambda \neq 0, \mu = -\lambda$
- $\emptyset$ sinon

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrons $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Comme $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, \ a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff x+y \leq x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$$
$$\iff \sqrt{xy} \geq 0$$

Or $\sqrt{xy} \geq 0$ ;
D'où le résultat.

2. Montrons $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.

(1) $0 \leq x = y + x - y \leq y + |x-y|$

Or $y \in \mathbb{R}_+$ et $|x-y| \in \mathbb{R}_+$,
Donc, d'après 1.,
$$\sqrt{y + |x-y|} \leq \sqrt{y} + \sqrt{|x-y|}$$
Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$
$$\sqrt{x} \leq \sqrt{y + |x-y|}$$
Donc $$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|}$$

(2) De même
$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{|y-x|} \cancel{= \sqrt{|x-y|}}$$
i.e $$-(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \leq \sqrt{|x-y|}$$
Le résultat suit.

3. Montrons

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} & \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\ \Longleftrightarrow\quad & 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \end{aligned}$$

Or $\quad 0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$

Le résultat suit.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les réels tels que

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$.

Montrons

$$\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \quad (P_1)$$

$$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \quad (P_2)$$

Prenons $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

De même pour $y_1, \ldots, y_n$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$$

$$|x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Donc $$\sum_i |x_i + y_i| \leq \left(\sum_i |x_i|\right) + \left(\sum_i |y_i|\right)$$

et $$\max_i |x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

C'est le résultat visé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons
$$U_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $U_n$ | $1/2$ | $1/3$ | $1/4$ |

Il semble que
$$U_n = \frac{1}{n+1}.$$

Or
$$(n+1)U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$(n+1)U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1-1}\binom{n+1}{k+1}$$

$$= \sum_{k'=1}^{n+1} (-1)^{k'-1}\binom{n+1}{k'}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \sim - \sum_{k=0} \sim$$

$$= -(1-1)^{n+1} - (-1)^{0-1}\binom{n+1}{0}$$

$$= 1$$

D'où $\boxed{U_n = \frac{1}{n+1}}$

$\boxed{\text{Aussi}}$ :

Pour $k \in [\![0, n]\!]$

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k \, dx$$

$$\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \int_0^1 \binom{n}{k}(-x)^k \, dx$$

Donc
$$U_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-x)^k 1^{n-k}\right) dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^n \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \times (-1)\right) dx$$

$$= -\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} - \left(-\frac{(1-0)^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

Soit $n \in \{2;3;4;\dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Posons
$$U_n = \sum_{1 \le i < j \le n} (j-i)$$

Table de valeurs de
$(i,j) \longmapsto j-i$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 | 3 | | $n-1$ |
| 2 | | | 1 | 2 | | $n-2$ |
| 3 | | | | 1 | | $n-3$ |
| 4 | | | | | ⋱ | $n-4$ |
| ⋮ | | | | | | ⋮ |
| $n-1$ | | | | | | 1 |

$$U_n = \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} k$$
$$= \sum_{j=2}^{n} \frac{j(j-1)}{2}$$
$$= \sum_{j=2}^{n} \left( \frac{(j+1)j(j-1)}{6} - \frac{j(j-1)(j-2)}{6} \right)$$
$$\boxed{U_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}}$$

On vérifie
$U_2 = 1$ ; $U_3 = 4$

Aussi :
$$U_n = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} (j-i)$$
$$= \sum_{j=2}^{n} \sum_{i'=1}^{j-1} i'$$

Remarque :
$$U_n = \sum_{\substack{1<j\le n \\ 1 \le i < j}} \sim = \sum_{1<j\le n} \left( \sum_{1 \le i < j} \sim \right)$$

Aussi
$$U_n = \sum_{\substack{1 \le i < n \\ i < j \le n}} (j-i)$$
$$= \sum_{1 \le i < n} \left( \sum_{i < j \le n} (j-i) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j'=1}^{n-i} j'$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$$
$$= \sum_{i'=1}^{n-1} \frac{i'(i'+1)}{2}$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)}{2}$$

Aussi $U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{\substack{i<j \\ j-i=k}} k \right)$

$U_n = \sum_{v=1}^{n-1} v(n-v)$