Chapitre 4
Fonctions usuelles

Table des matières

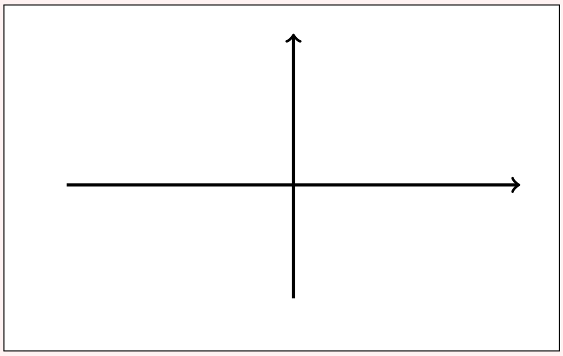
1 Généralités

1.1 Fonctions, images, composition

Définition 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

1. L'ensemble D est appelé ensemble de définition de f.
2. Si x est un élément de D et $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x par f, et on dit que x est *un* antécédent de x par f.



Remarque 2

1. Attention, un antécédent n'est pas nécessairement unique !
2. La notion d'ensemble de définition est arbitraire : ce que vous appeliez « ensemble de définition » en Terminale est en réalité l'ensemble de définition maximal (au sens de l'inclusion) de f. Par exemple, on peut très bien définir $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$, et $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$

Définition 3 (Image d'une partie)

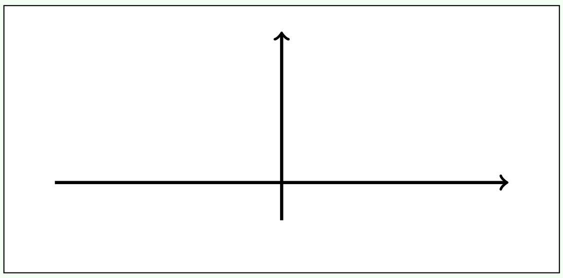
Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $A \subset D$. L'image de A par f, notée $f(A)$ est l'ensemble $\{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}$. Si $A = D$, on dit que $f(D)$ est l'image de f et on le note $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 4

L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est $[1, +\infty[$. L'image de $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par cos est $\{-1, 1\}$.

Proposition 5 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, soit f **continue** de $[a, b]$, soit M entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$.



Définition 6

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, et E une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f est à valeurs dans E si $\mathrm{Im}(f) \subset E$, i.e. $\forall x \in D,\ f(x) \in E$. On notera alors $f : D \to E$.

Remarque 7

Attention, cela ne signifie pas que $\mathrm{Im(f)} = \mathrm{E}$! Par exemple, la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout x par $f(x) = x^2 + 2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ mais n'atteint jamais la valeur 1 !

Point de méthode 8

Pour **définir** une fonction, on doit donner son ensemble de définition, l'ensemble dans lequel elle va, et l'expression de cette fonction.

On écrit par exemple

$$\text{Soit } f : \left| \begin{array}{rcl} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right.$$

Définition 9

Soient D et E deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to E$ une fonction. On dit que f est une bijection de D sur E si

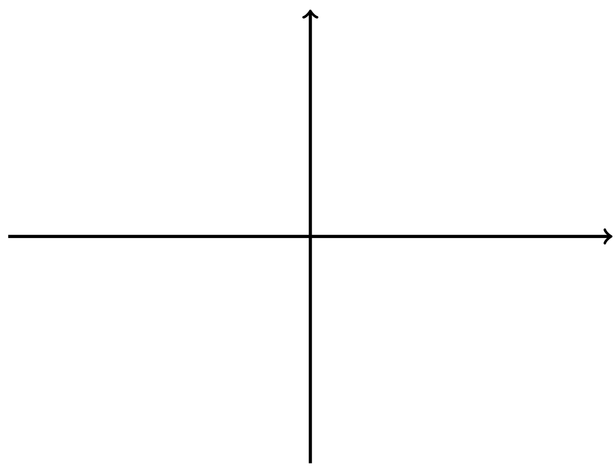
$$\forall y \in E,\ \exists! x \in D,\ y = f(x).$$

On note alors f^{-1} la fonction qui à tout y réel associe l'unique antécédent de y par f, noté $f^{-1}(y)$.

Exercice 10

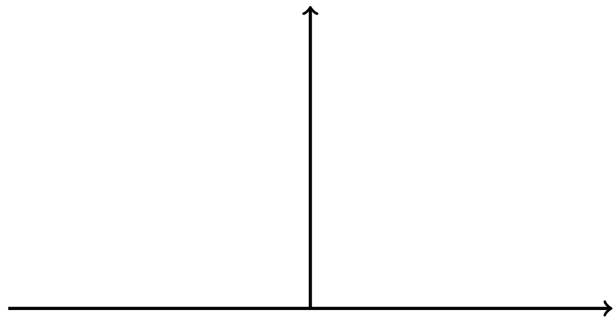
Dire si les fonctions suivantes sont des bijections.

1. la fonction sinus de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.

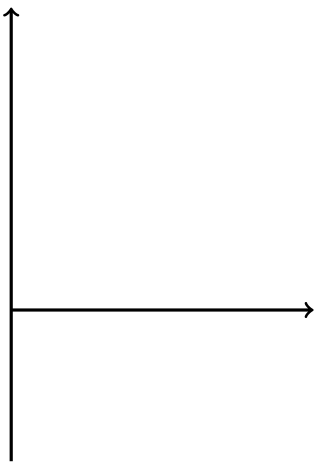


N. Laillet
W. Ngambou

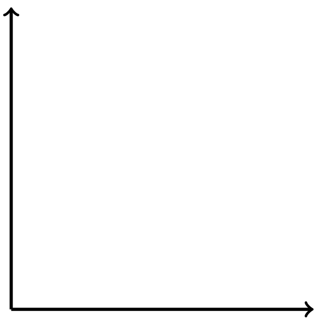
2. la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.



3. la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.



4. la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.



Définition 11 (Composition)

Soient D et E deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$. On suppose que f est à valeurs dans E. Alors la composée de f par g, notée $g \circ f$, est la fonction définie comme suit :

$$g \circ f : \left| \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g\left(f(x)\right) \end{array} \right.$$

Exemple 12

Soient $f : x \mapsto x + 2$ et $g : x \mapsto x^2$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Conclusion ?

Proposition 13

Si $f : D \to E$ et $g : E \to F$ sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection, de bijection réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.2 Monotonie

Définition 14

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $A \subset D$. On dit que

1. f est croissante sur A si $\forall (x, y) \in A^2,\ (x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \leqslant f(y))$.
2. f est décroissante sur A si $\forall (x, y) \in A^2,\ (x \leqslant y) \Rightarrow (f(x) \geqslant f(y))$.
3. f est strictement croissante sur A si $\forall (x, y) \in A^2,\ (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$.
4. f est strictement décroissante sur A si $\forall (x, y) \in A^2,\ (x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y))$.
5. f est (strict.) monotone sur A si f est (strict.) croissante ou (strict.) décroissante sur A.

Remarque 15

Pour nos amis anglophones, *increasing* signifie « strictement croissante » . Pour dite « croissante » , on utilise le terme *nondecreasing*. C'est absurde car « non (f est décroissante) » se traduit par

ce qui n'est pas **du tout** la même chose de f est croissante.

Remarque 16

Si f est croissante sur A, alors

$$\forall (x, y) \in A^2,\ f(x) < f(y) \Rightarrow x < y.$$

(et l'inverse si f est décroissante). On peut le démontrer

Proposition 17

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur $A \subset \mathbb{R}$. Si f et g sont toutes deux croissantes (resp. décroissantes) sur A, alors $f + g$ est croissante (resp. décroissante) sur A.

Proposition 18

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ à valeurs dans E, $g : E \to \mathbb{R}$. Soit $A \subset D$.

1. si f est croissante sur A et g est croissante sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est croissante sur A.
2. si f est décroissante sur A et g est croissante sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est décroissante sur A.
3. si f est croissante sur A et g est décroissante sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est décroissante sur A.
4. si f est décroissante sur A et g est décroissante sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est croissante sur A.

Théorème 19 (Théorème de la bijection)

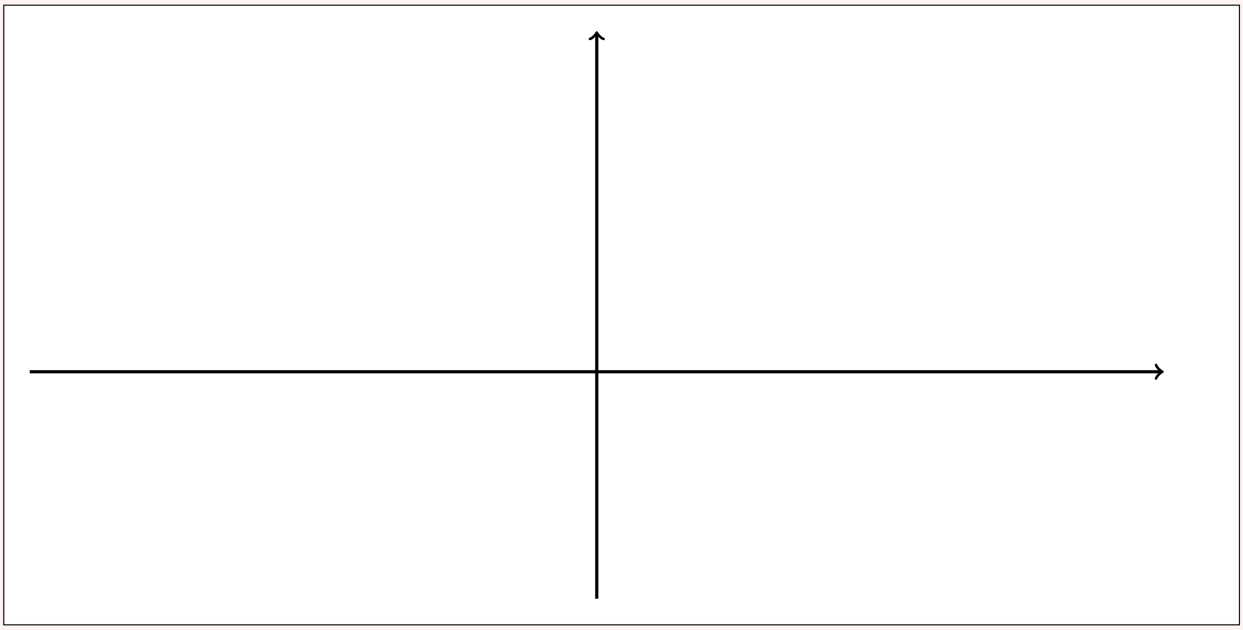
Si f est **continue** et **strictement monotone** sur un **intervalle** $\mathrm{I} = (a, b)$ (les parenthèses pouvant être des crochets ouverts ou fermés), si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = d$, alors f est une bijection de I sur (c, d), de bijection réciproque continue.

Définition 20 (Une première approche de la convexité)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $A \subset D$. On dit que f est convexe sur A si

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que f est concave sur A si $\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.



1.3 Graphe d'une fonction et transformations

À la fin de cette section, vous devez être capable de dessiner à main levée le graphe de fonctions usuelles et de leurs transformations. Commençons par les indications générales.

Définition 21

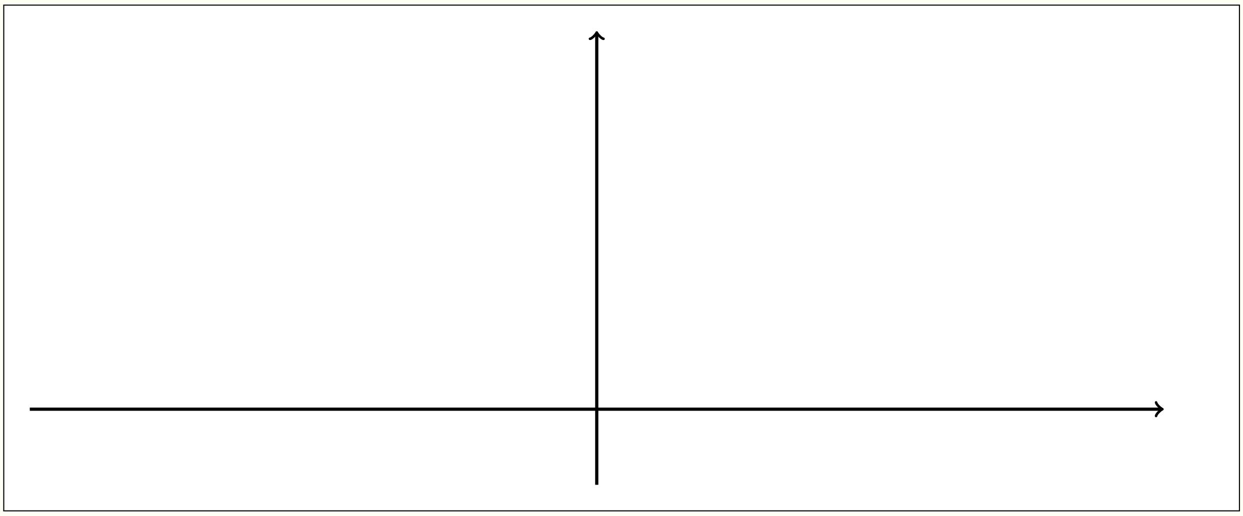
Le graphe ou la courbe représentative d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\{(x, f(x)),\ x \in D\}.$$

Exemple 22

Dessiner à main levée le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, qui vérife **toutes les propriétés suivantes**

1. f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $[0, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty]$.
2. f est convexe sur $]-\infty, 1]$ et convexe sur $[1, \infty[$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$
5. $f(1) = 2$



Définition 23

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) \leqslant M$.
2. On dit que f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D,\ f(x) \geqslant m$.
3. On dit que f est bornée sur D si $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in D,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Proposition 24

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Définition 25

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite symétrique si $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Exemple 26

Ainsi, $\mathbb{R}$ est symétrique, $\mathbb{R}^*$ est symétrique, $[-2, -1] \cup [1, 2]$ est symétrique.

Définition 27

Soit D une partie symétrique de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

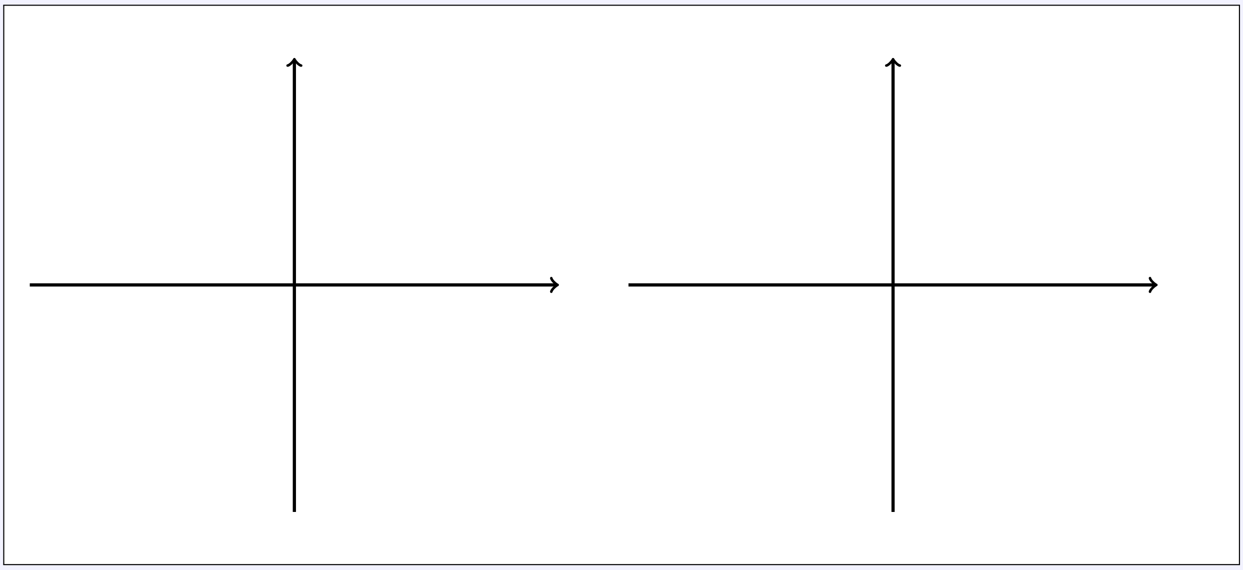
1. On dit que f est paire si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.
2. On dit que f est impaire si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Exemple 28

La fonction $x \mapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$. La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque 29

Les fonctions paires ont un graphe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Les fonctions impaires ont un graphe symétrique par rapport à l'origine. De plus, si f est impaire, $f(0) = f(-0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$.



pagebreak

Proposition 30 (Propriétés des fonctions paires et impaires.)

1. La somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire).
2. Le produit de deux fonctions paires ou de deux fonctions impaires est pair ; le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impair.
3. Si f est paire, à valeurs dans D, alors pour toute g définie sur D, $g \circ f$ est paire.
4. Toute fonction définie sur un domaine symétrique de $\mathbb{R}$ est décomposable de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Définition 31

Soit T un réel strictement positif. Une partie de $D \subset \mathbb{R}$ est dite T-périodique si pour tout x de D, $x - T$ et $x + T$ sont dans D.

Remarque 32

Une partie T-périodique non vide de $\mathbb{R}$ ne peut pas être bornée puisque si elle contient un réel x_0, alors elle contient tous les $x_0 + kT$ pour k dans $\mathbb{Z}$.

Définition 33

Soit $T \in \mathbb{R}$, D une partie T-périodique de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f est dite T-périodique si $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$.

Exemple 34

Le sinus, le cosinus sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. La tangente est π-périodique sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

Proposition 35 (Propriétés des fonctions périodiques)

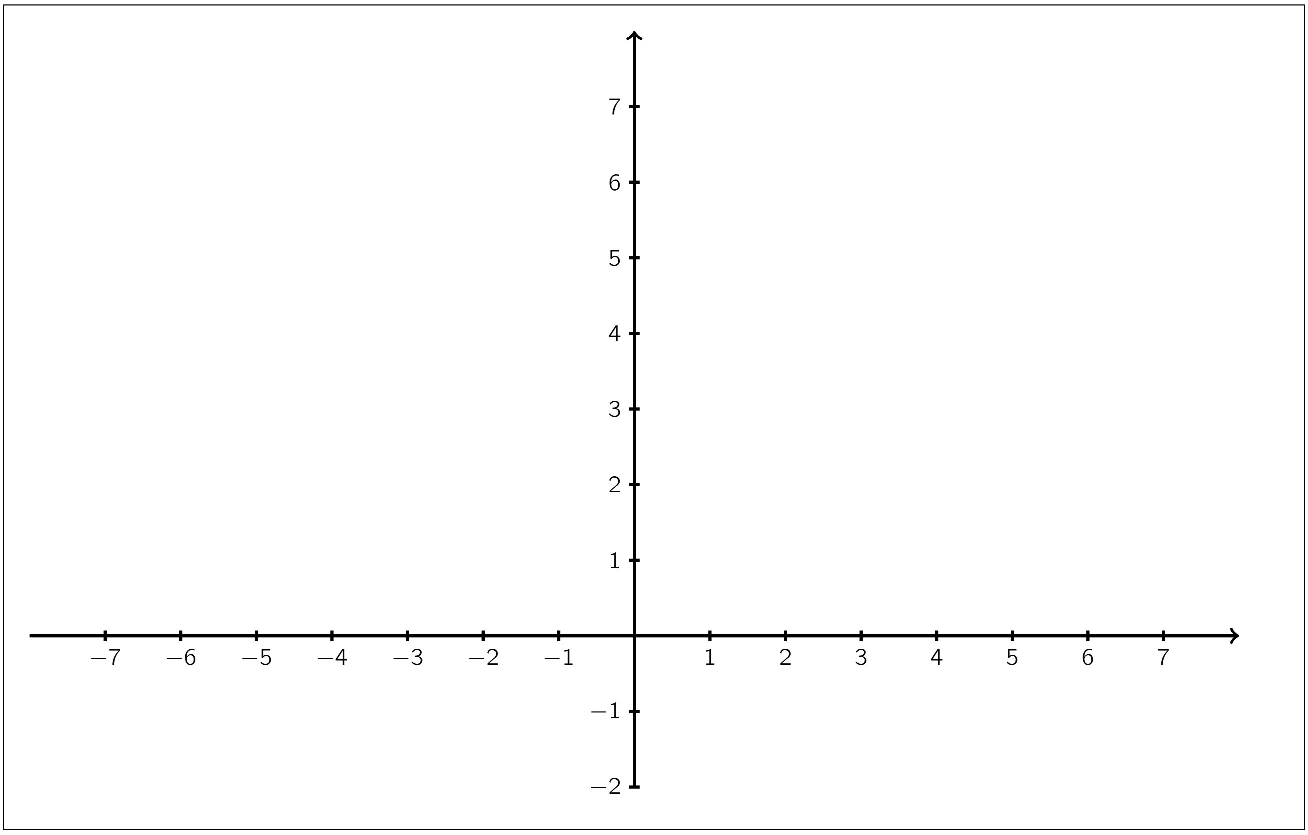
1. Si f est T-périodique sur D, alors pour tout n dans $\mathbb{Z}$, pour tout x dans D, $f(x+nT)=f(x)$.
2. La somme de deux fonctions périodiques de même période est périodique. Il en est de même pour le produit.
3. Si f est T-périodique, à valeurs dans D, alors pour toute g définie sur D, $g\circ f$ est T-périodique.

Remarque 36 (Restriction de l'intervalle d'étude)

Pour étudier une fonction paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.
Pour étudier une fonction T périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T.

Exercice 37 (Exercice préliminaire à la page suivante)

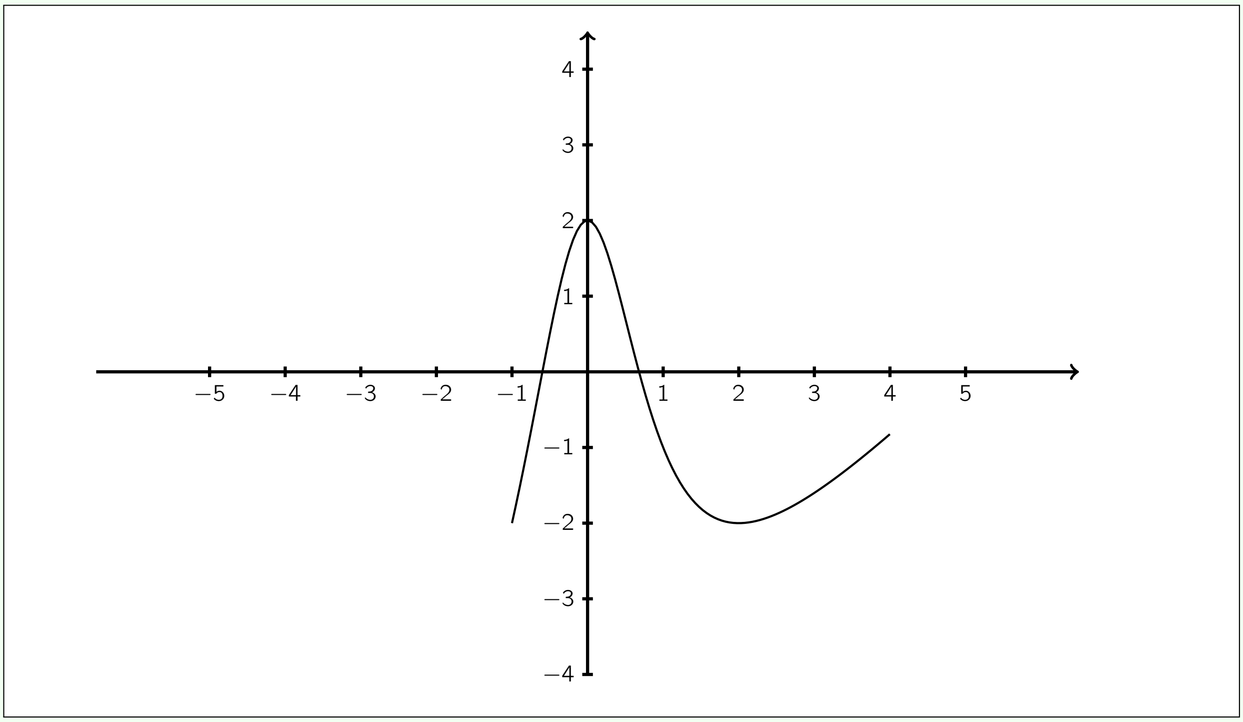
Représenter sur un même graphe, $f:x\mapsto x^2$, $g\mapsto f(x+1)$, $g\mapsto f(2x)$, $g\mapsto f(x)+1$.



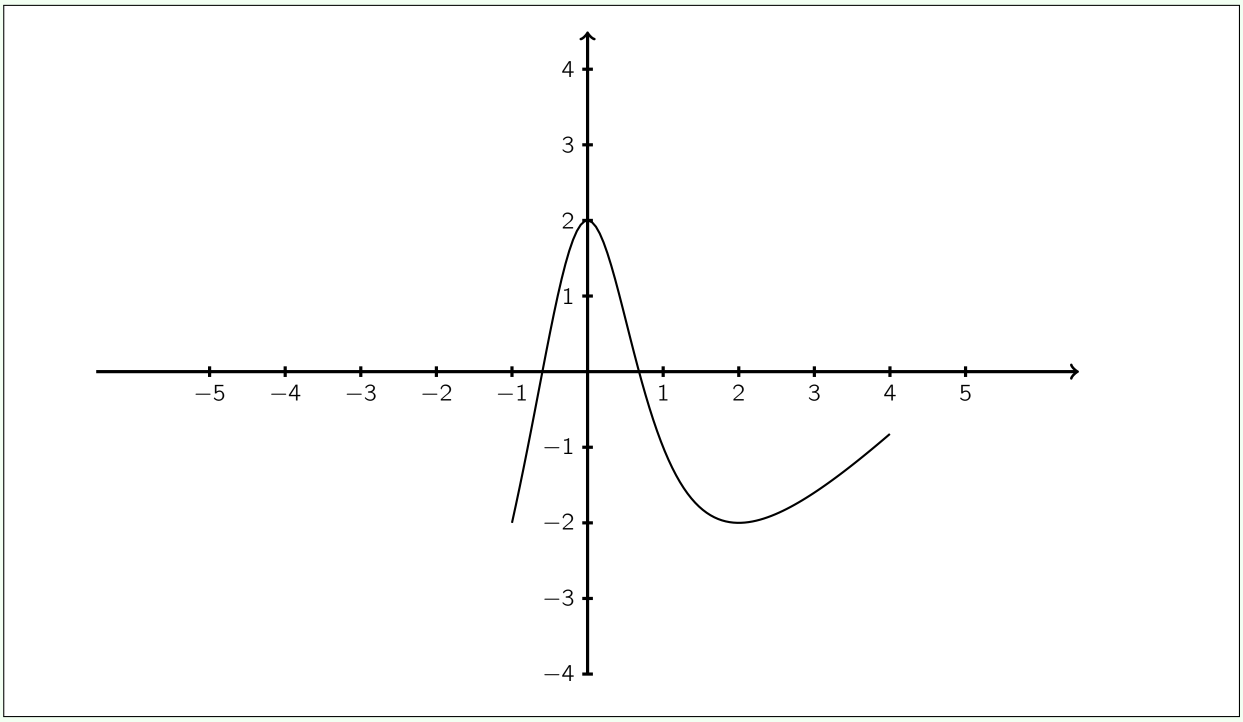
Proposition 38 (Transformations des graphes)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $\mathscr{C}_f$ sa courbe. Soit a un réel, λ un réel strictement positif.

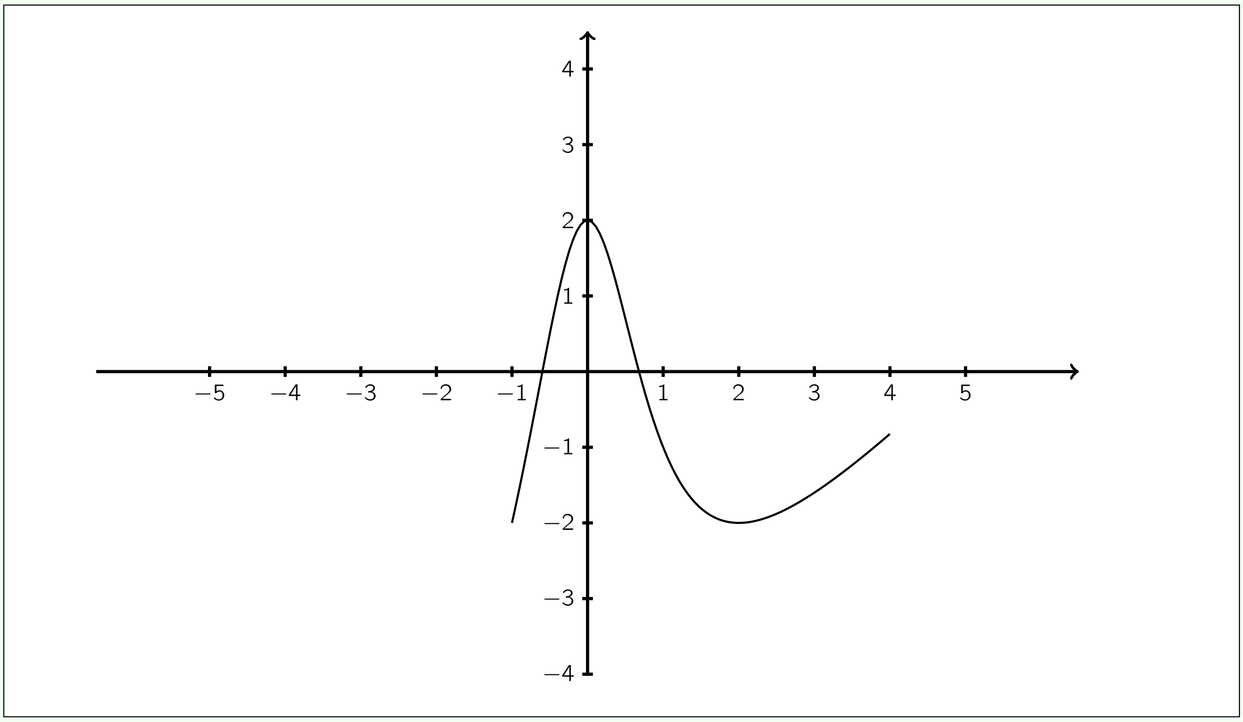
1. La courbe représentative de $x \mapsto f(x) + a$ est la translation de $\mathscr{C}_f$ par le vecteur de coordonnées $(0, a)$.



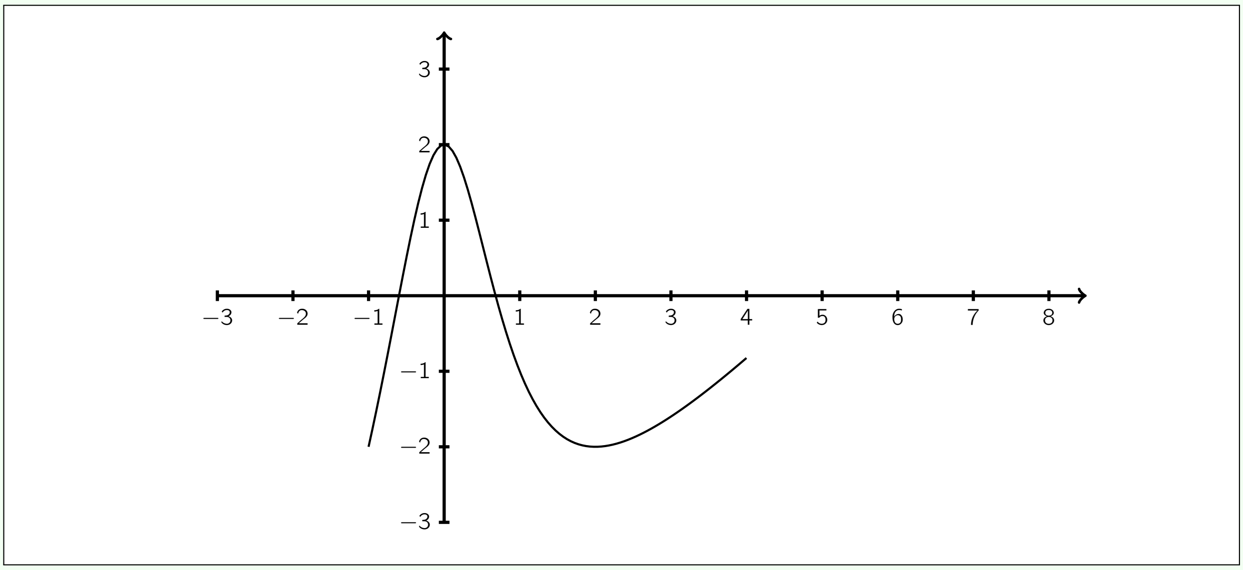
2. La courbe représentative de $x \mapsto f(x + a)$ est la translation de $\mathscr{C}_f$ par le vecteur $(-a, 0)$.



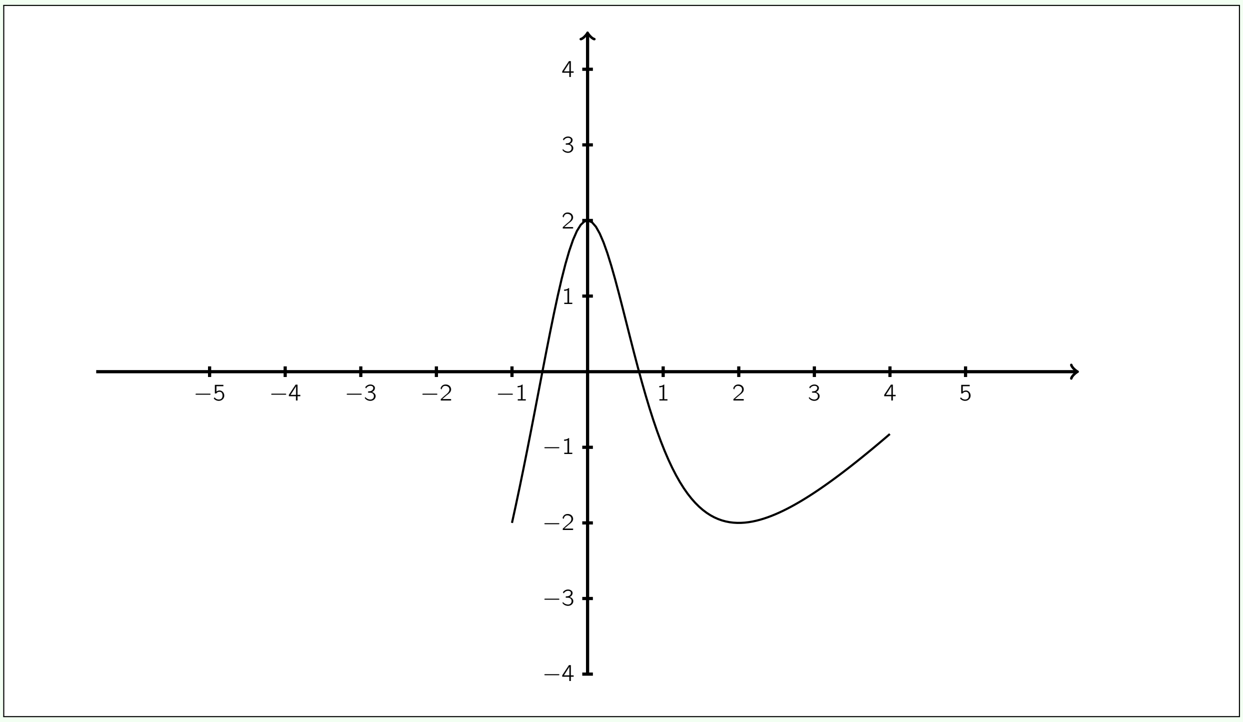
3. La courbe représentative de $x \mapsto \lambda f(x)$ est la contraction (si $\lambda < 1$) ou la dilatation (si $\lambda \geqslant 1$) verticale de $\mathscr{C}_f$ de facteur λ.



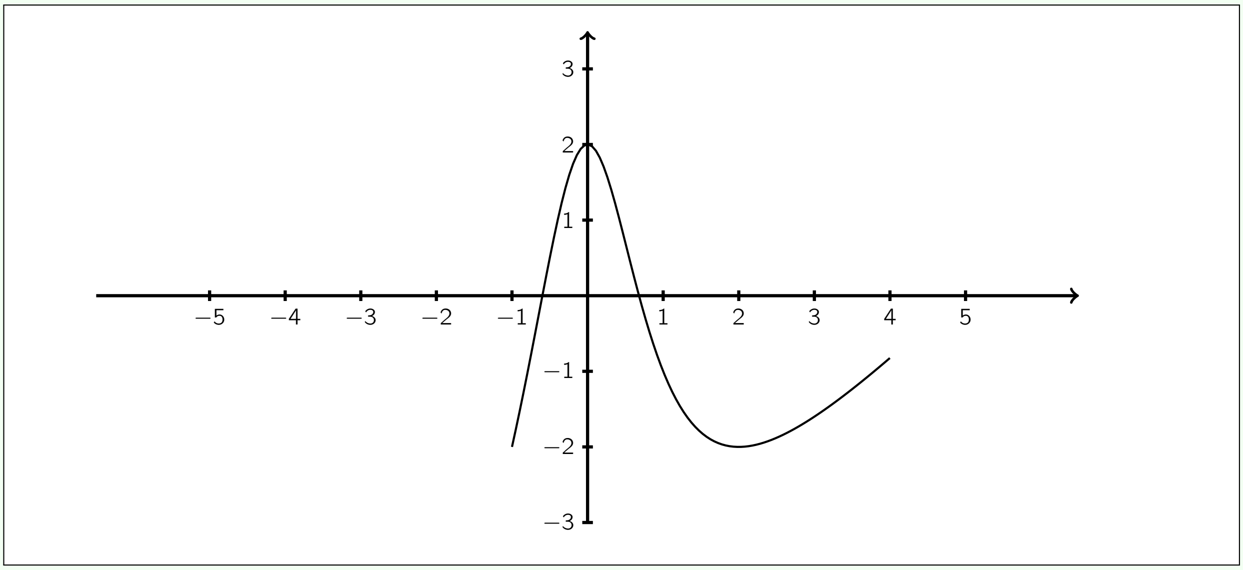
4. La courbe représentative de $x \mapsto f(\lambda x)$ est la contraction (si $\lambda < 1$) ou la dilatation (si $\lambda \geqslant 1$) horizontale de $\mathscr{C}_f$ de facteur λ.



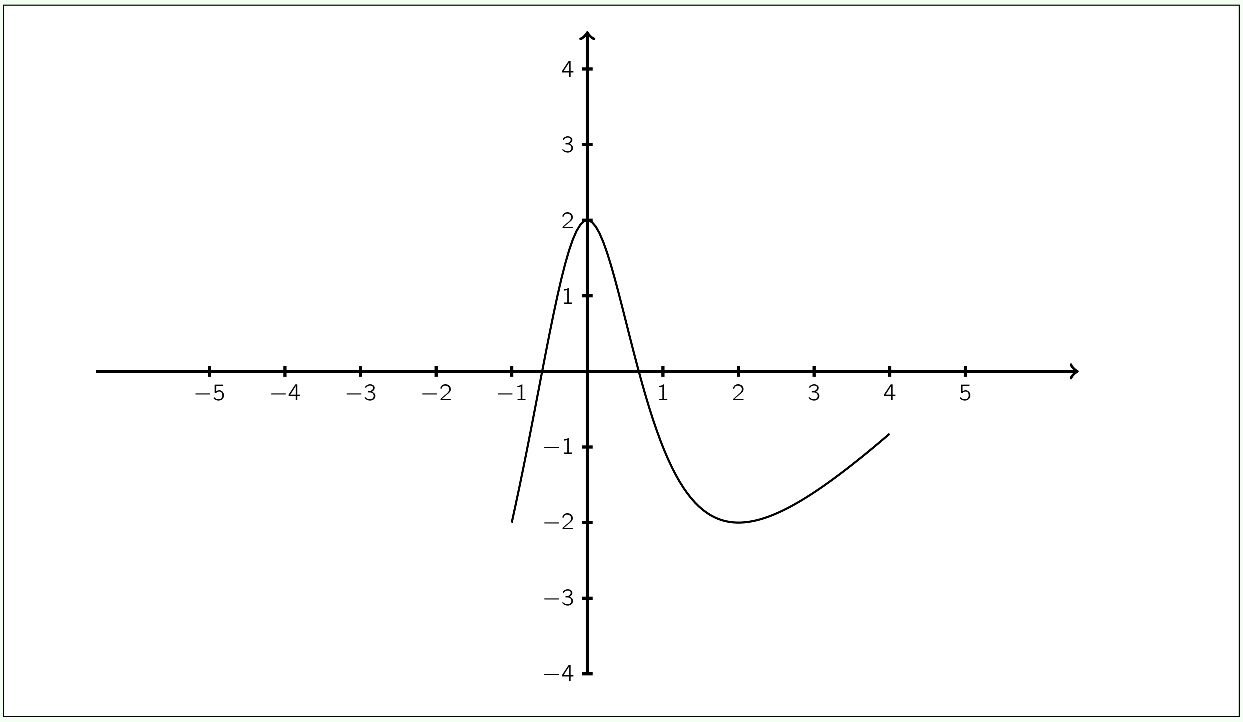
5. La courbe représentative de $x \mapsto -f(x)$ est le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.



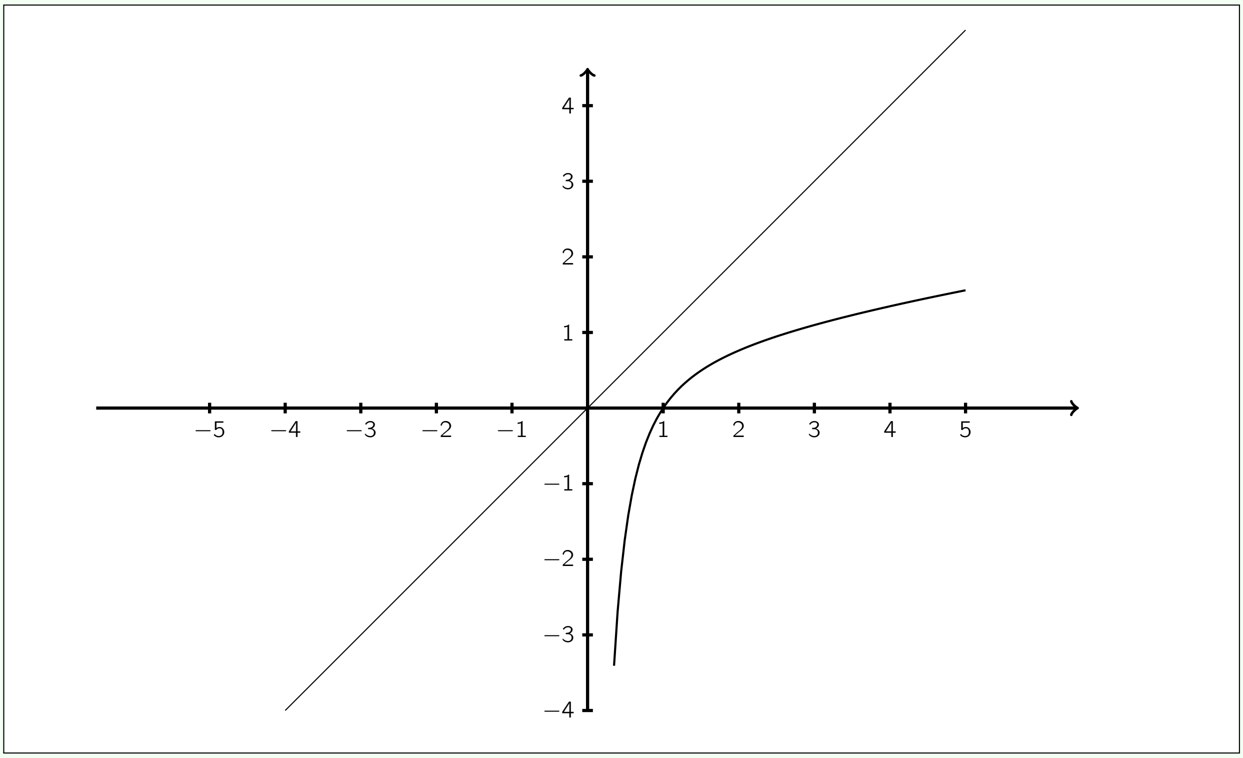
6. La courbe représentative de $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées.



7. La courbe représentative de $x \mapsto f(a-x)$ est le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.



8. Si f est bijective, la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses.



2 Dérivation

On donnera ici la définition de terminale de la dérivabilité et on ne donnera même pas de définition de la continuité (c'est une définition trop importante pour qu'elle traîne au milieu d'un chapitre zoologique comme celui-ci). Afin de simplifier les choses, on considèrera des fonctions définies sur un intervalle.

Définition 39

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, (x \leqslant y) \Rightarrow [x,y] \subset \mathrm{I}.$$

Définition 40

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, a un élément de I. La fonction f est dérivable en a si le quotient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

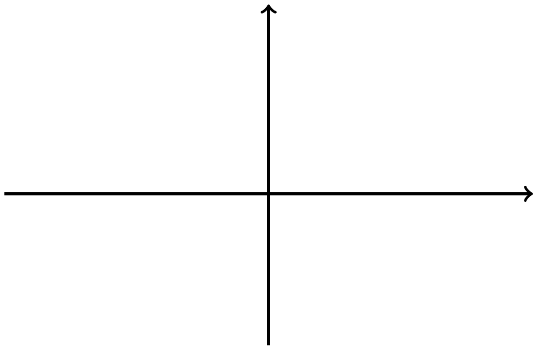
admet une limite quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.
La fonction f est dite dérivable sur I si pour elle est dérivable en tout point de I. Sa fonction dérivée est alors notée f'.
Une fonction dérivable de dérivée continue est dite de classe $\mathscr{C}^1$.
Une fonction $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Proposition 41

Une fonction dérivable est continue ; **la réciproque est fausse**.

Remarque 42

Interprétation en termes de taux d'accroissement instantané



Proposition 43

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$, f et une fonction dérivable en a. Alors la courbe représentative de la fonction f admet une tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$, d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Exemple 44

Nous avons étudié en détail, dans le chapitre 2, les dérivées de sin et cos.

Proposition 45

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$, f et g deux fonctions dérivables en a. Alors

1. Pour tous réels λ et μ, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a de nombre dérivé $\lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
2. $f.g$ est dérivable en a de dérivée $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. Si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a de dérivée $\dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Les preuves seront faites plus tard !

Proposition 46 (Règle de la chaîne)

Soient I un intervalle, $a \in \mathrm{I}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, dérivable en a, à valeurs dans un intervalle J, $g : J \to \mathbb{R}$, dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g' \circ f(a) \times f'(a).$$

Exemple 47

Dériver $x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2(x)}$.

Remarque 48

Attention à la manière d'écrire les choses ! Vous remarquerez que j'écris toujours « La fonction f » ou bien « La fonction $x \mapsto f(x)$ » mais JAMAIS « La fonction $f(x)$ ».
$f(x)$ est un nombre, pas une fonction, cela n'a donc AUCUN SENS d'écrire $(f(x))'$!

Proposition 49 (Tableau des dérivées usuelles)

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
x^n $(n \in \mathbb{N})$		x^a $(a \in \mathbb{R})$	
e^x		$\ln(x)$	
$\sin(x)$		$\cos(x)$	

Proposition 50

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x)$ est positif.
2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x)$ est négatif.
3. f est constante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Proposition 51

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Si pour tout x de I, $f'(x)$ est strictement positif, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si pour tout x de I, $f'(x)$ est strictement positif, alors f est strictement croissante sur I.

Remarque 52

1. Attention, on a besoin de travailler sur un intervalle, pensez à la fonction inverse ! Elle est de dérivée strictement négative sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

2. Attention, les réciproques dans la proposition 51 ne sont pas vraies.

On a enfin un résultat sur la dérivée d'une bijection réciproque :

Théorème 53

Si f est une bijection de I sur J (où I et J sont des intervalles), si d est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable et

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}.$$

On peut dériver plusieurs fois des fonctions.

Définition 54

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est n fois dérivable sur I si on peut dériver f n fois de suite. On note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième. Par convention, $f^{(0)} = f$.
On note f' au lieu de $f^{(1)}$, et f'' au lieu de $f^{(2)}$.

Remarque 55 (Une remarque importante)

On remarque que $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$... cela ressemble aux identités remarquables !

Enfin, il est bon de savoir que l'on peut dériver une fonction à valeurs complexes :

Définition 56

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont. On définit alors $f' : x \mapsto \mathfrak{Re}(f)'(x) + \mathfrak{Im}(f)'(x)$.

Remarque 57

Cette définition est surtout très utile pour dériver $x \mapsto \mathrm{e}^{i\varphi(x)}$ où φ est une fonction réelle. La dérivée est alors $x \mapsto \varphi'(x)\mathrm{e}^{i\varphi(x)}$.

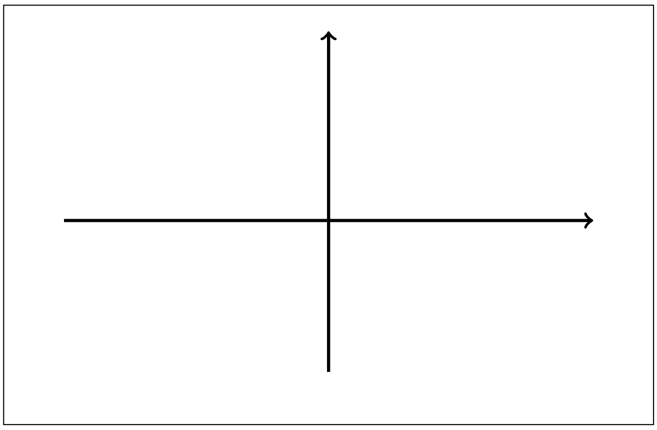
Point de méthode 58

Étudier les variations d'une fonction peut être très utile pour établir des inégalités. Ainsi, on peut démontrer que pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ par étude de fonction.

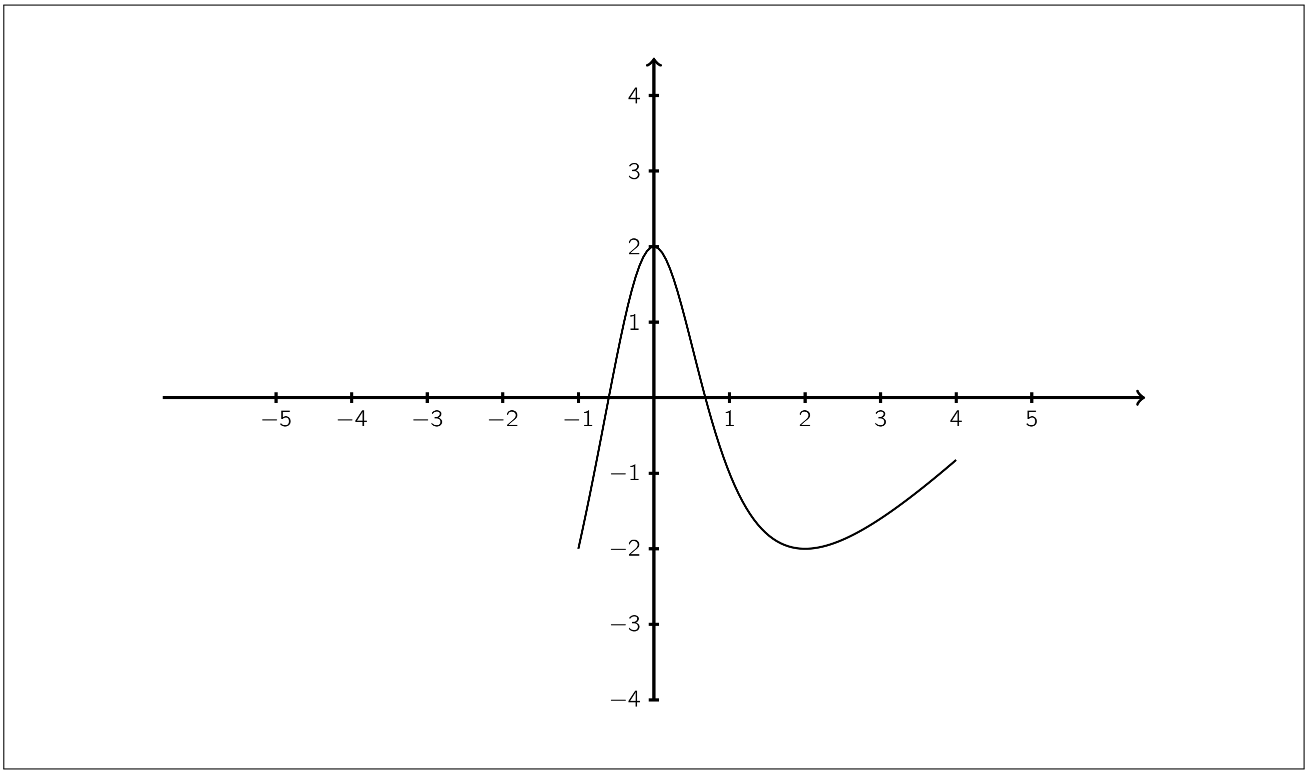
3 Fonctions usuelles

3.1 Deux fonctions importantes

Définition 59
La fonction valeur absolue A est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = |x|.$$

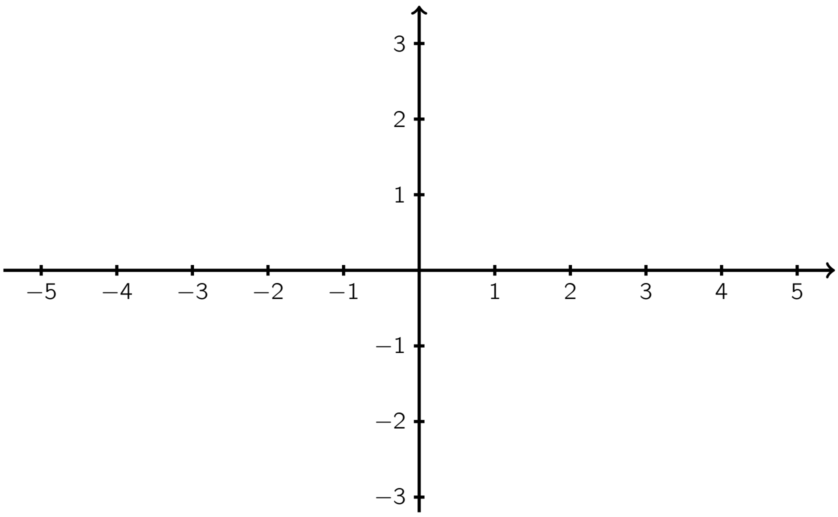


Exercice 60
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comment représenter $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto f(|x|)$?



Définition 61

La partie entière d'un réel x est l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On la note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$. On définit donc une fonction partie entière : $x \mapsto E(x)$.

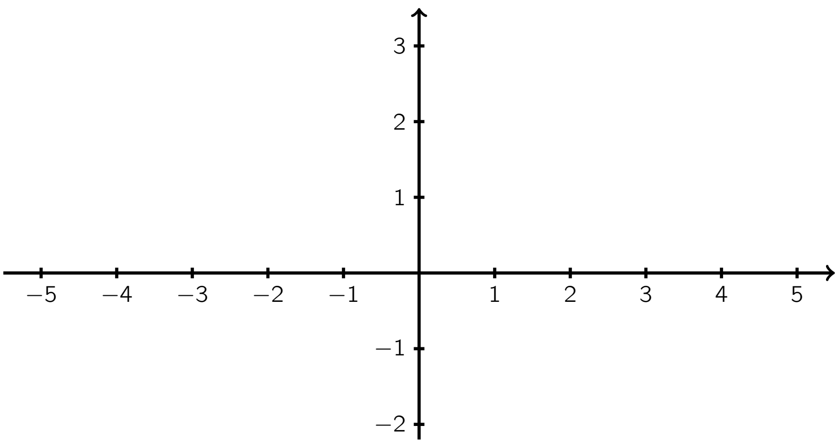


Proposition 62

La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ mais n'est strictement croissante sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 63

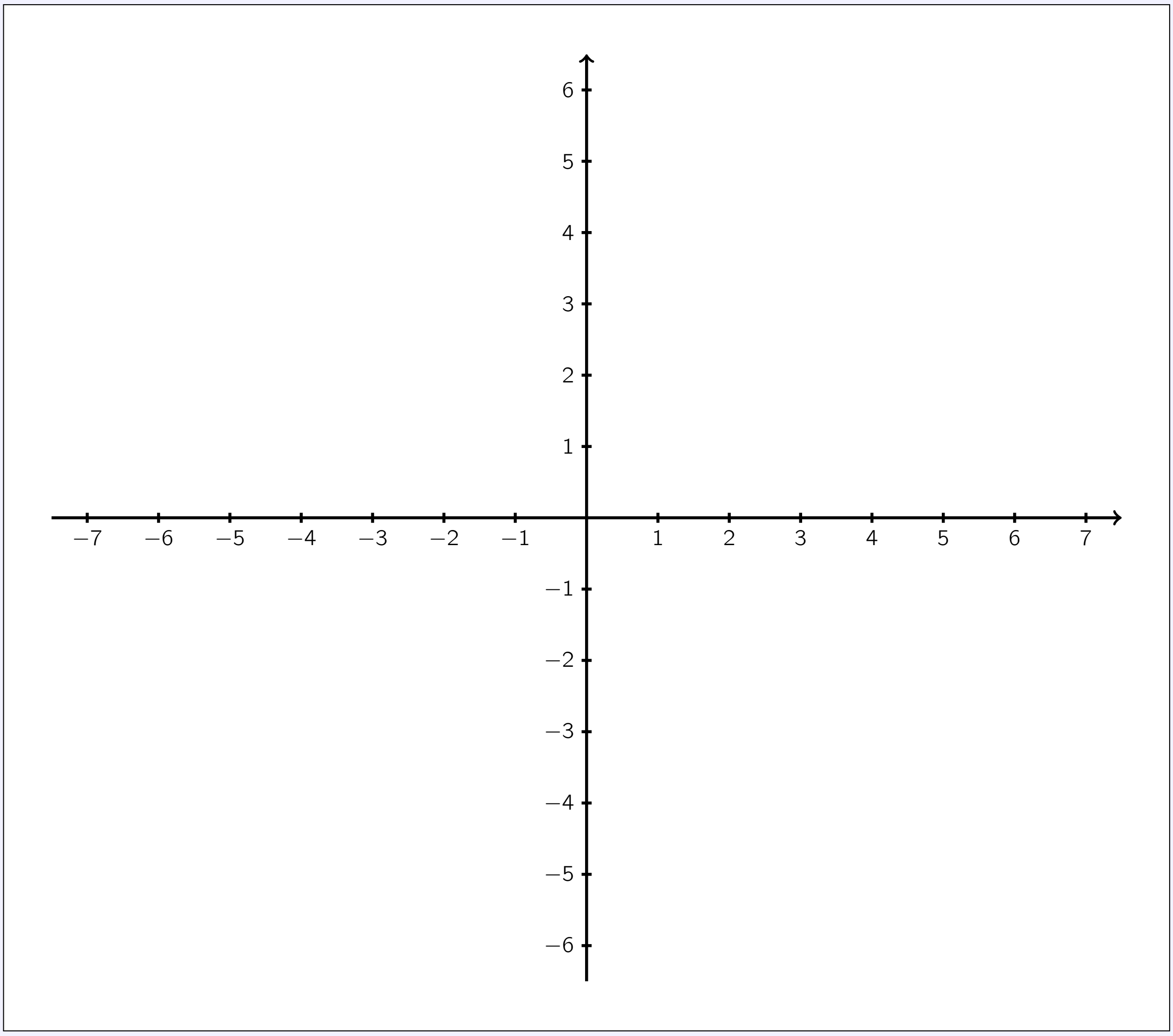
On définit la partie fractionnaire d'un réel $\{x\}$ comme $\{x\} = x - E(x)$. Déterminer la périodicité de $x \mapsto \{x\}$ et tracer son graphe.



3.2 Fonctions polynomiales et fractions rationnelles

Remarque 64

Représentons les $a \mapsto x^a$ avec a dans $\mathbb{N}$, puis a tel que $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{N}$, puis a quelconque dans $\mathbb{R}$.



Définition 65

Une homographie est une fonction f telle qu'il existe a, b, c et d quatre réels vérifiant $ad - bc \neq 0$ et pour tout x tel que $cx + d \neq 0$,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Il faut pouvoir représenter les homographies.

3.3 Fonctions exponentielle et logarithme

Définition 66

La fonction logarithme néperien, notée ln, est l'unique primitive de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ s'annulant en 1. On admet l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

Proposition 67 (Propriétés du logarithme)

1. ln est définie sur $]0,+\infty[$
2. ln est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$. En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

3. $\forall x > 0,\ (\ln(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (x \geqslant 1)$.
4. ln est strictement croissante sur son domaine de définition.
5. ln est concave sur son domaine de définition.
6. $\ln(1) = 0$, $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$.
8. limites

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

9. pour tous a et b strictement positifs, pour tout entier naturel n,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b),\ \ln(a^n) = n\ln(a).$$

Exercice 68

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$.

Définition 69

Soit a un réel strictement positif. On définit le logarithme en base a, noté $\log_a$ comme suit :

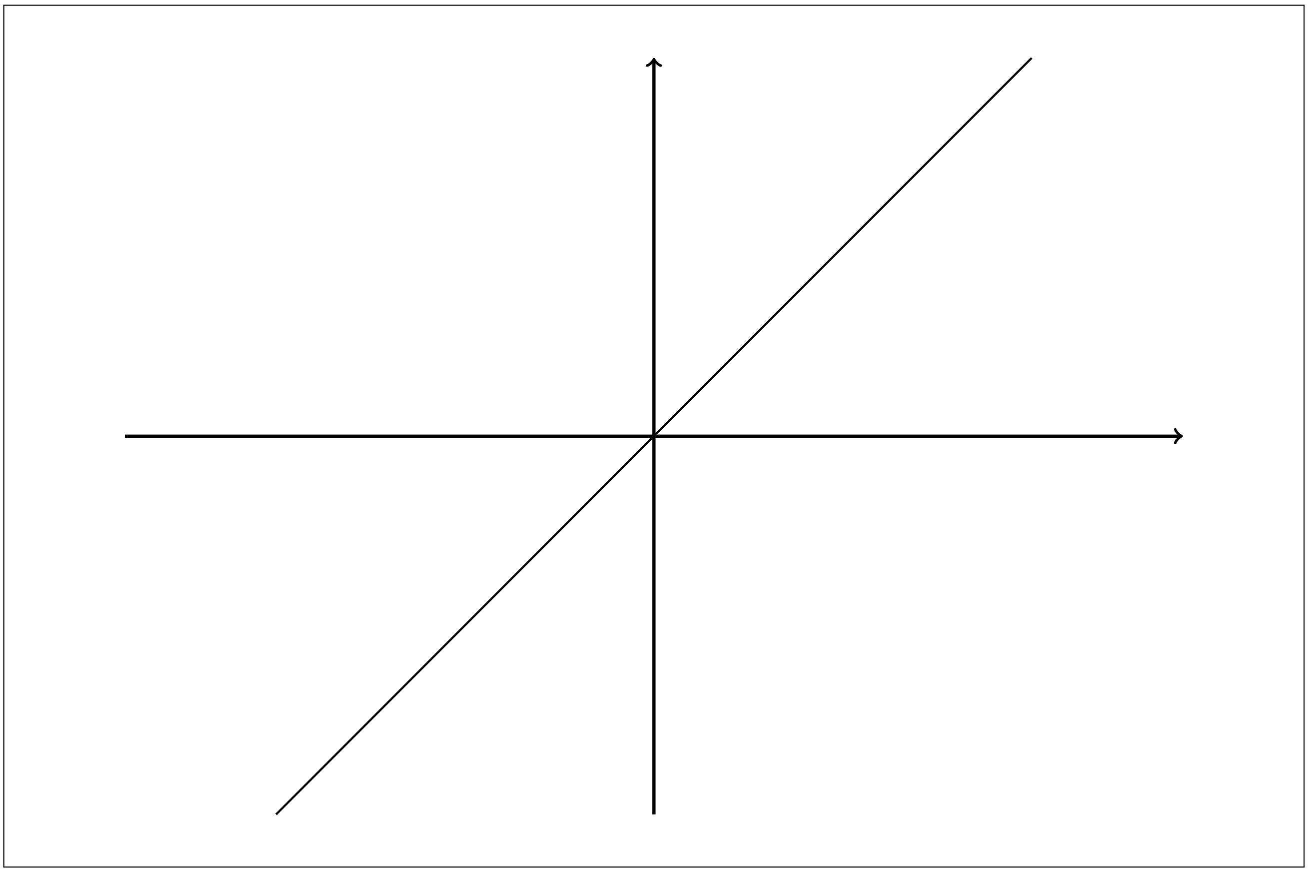
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Exemple 70

Le logarithme décimal est très utilisé en physique, aussi bien pour définir le pH que l'intensité sonore par exemple.

Proposition 71

La fonction logarithme néperien est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.



Définition 72

La bijection réciproque de ln, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, est nommée exponentielle et notée, pour tout x réel, $\exp(x)$ ou e^x.

Proposition 73 (Propriétés de l'exponentielle)

1. exp est définie sur $\mathbb{R}$
2. exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \exp^{(n)}(x) = f(x)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$.
4. $(\mathrm{e}^x \geqslant 1) \Leftrightarrow (x \geqslant 0)$
5. exp est strictement croissante sur son domaine de définition.
6. exp est convexe sur son domaine de définition.
7. $e^0 = 1,\ e^1 = \mathrm{e}$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$.
9. limites
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
10. pour tous a et b réels, pour tout entier n,
$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b,\ \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b},\ \mathrm{e}^{an} = (\mathrm{e}^a)^n.$$

Définition 74 (Puissances quelconques)

Soient a un réel strictement positif, b un réel quelconque. On définit a^x comme suit
$$a^b = \mathrm{e}^{b \ln(a)}.$$
On définit alors la fonction $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto x^b$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $b > 0$, on **prolonge** cette fonction à $\mathbb{R}_+$ en posant $0^b = 0$.

Remarque 75

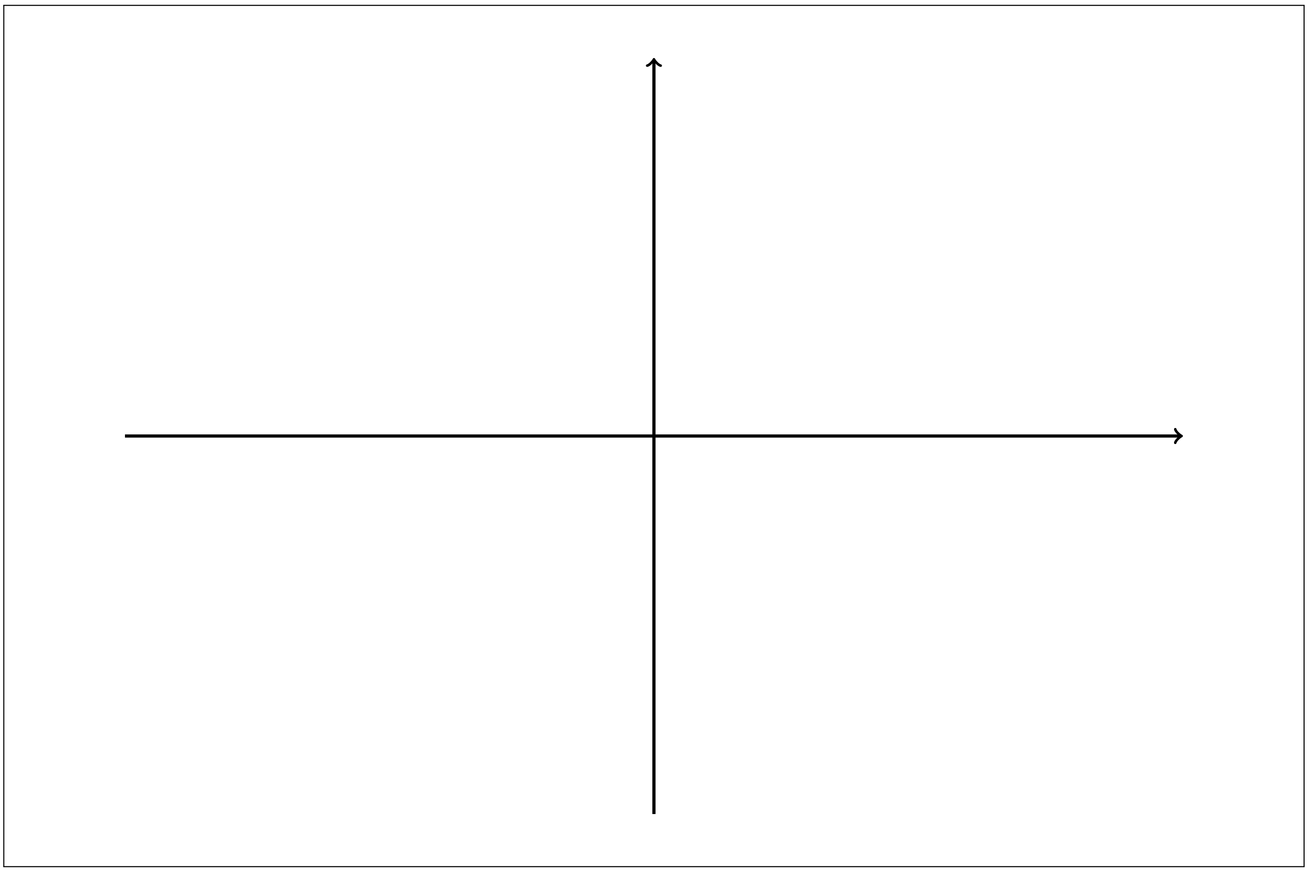
Cette définition coïncide avec celle des puissances entières. Cependant elle n'est valable que pour exponentier des réels positifs !

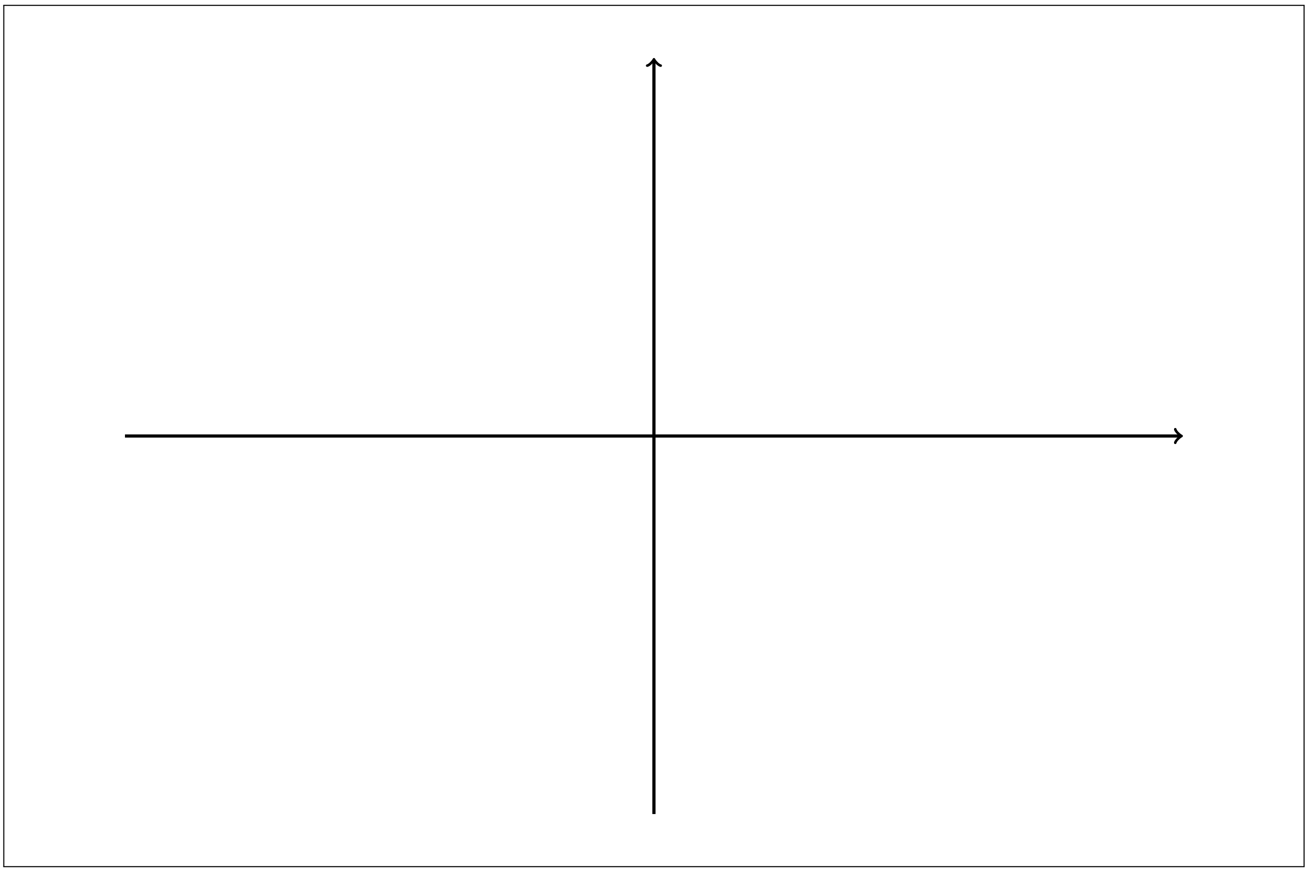
Proposition 76

Soit $a > 0$. Alors $x \mapsto \log_a(x)$ est la bijection réciproque de $x \mapsto a^x$.

Remarque 77

Comparons (graphiquement) les $x \mapsto x^b$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $b \in \mathbb{R}$, et comparons (graphiquement) les $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.





Proposition 78

Soient a, b des réels strictement positifs, x, y des réels et n un entier naturel.

1. 0^{-a} n'est pas défini, $0^0 = 1$ et $0^a = 0$.
2. $a^x a^y = a^{x+y}$.
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
4. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
5. $(a^x)^y = a^{xy}$.
6. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
7. $a^x b^x = (ab)^x$.
8. $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Proposition 79

Soit a un réel strictement positif.

1. La dérivée de $x \mapsto \log_a(x)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x ln(a)}$.
2. La dérivée de $x \mapsto a^x$ est $x \mapsto \ln(a)a^x$.

Proposition 80 (Croissances comparées)

1. Pour tout a strictement positif,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0, \quad \lim_{x\to0^+} x^a \ln(x) = 0.$$

2. Pour tout a réel,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty.$$

3.4 Fonctions hyperboliques

Définition 81

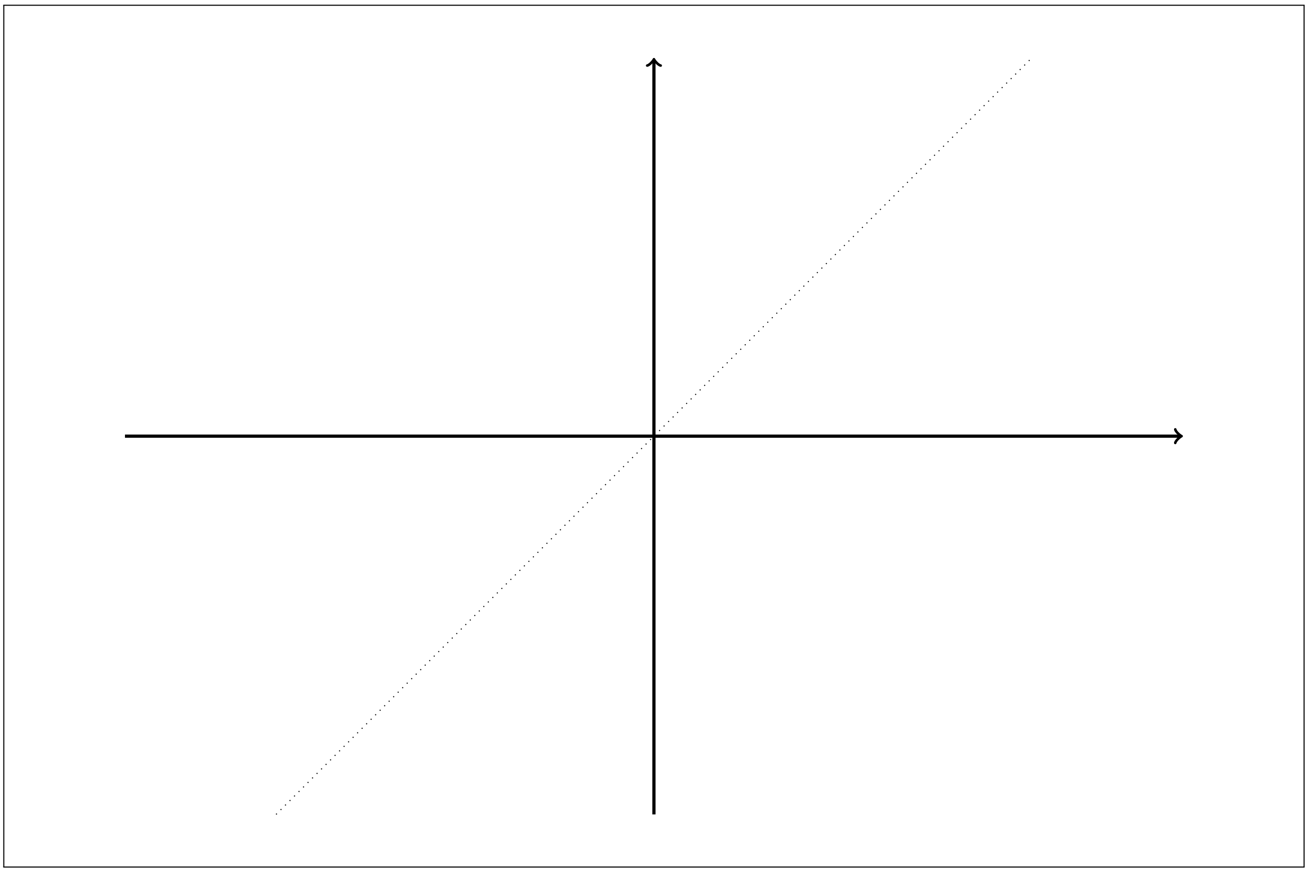
On définit le cosinus et le sinus hyperbolique, notés ch et sh, comme les parties paire et impaire de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On définit la tangente hyperbolique, notée th, comme $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

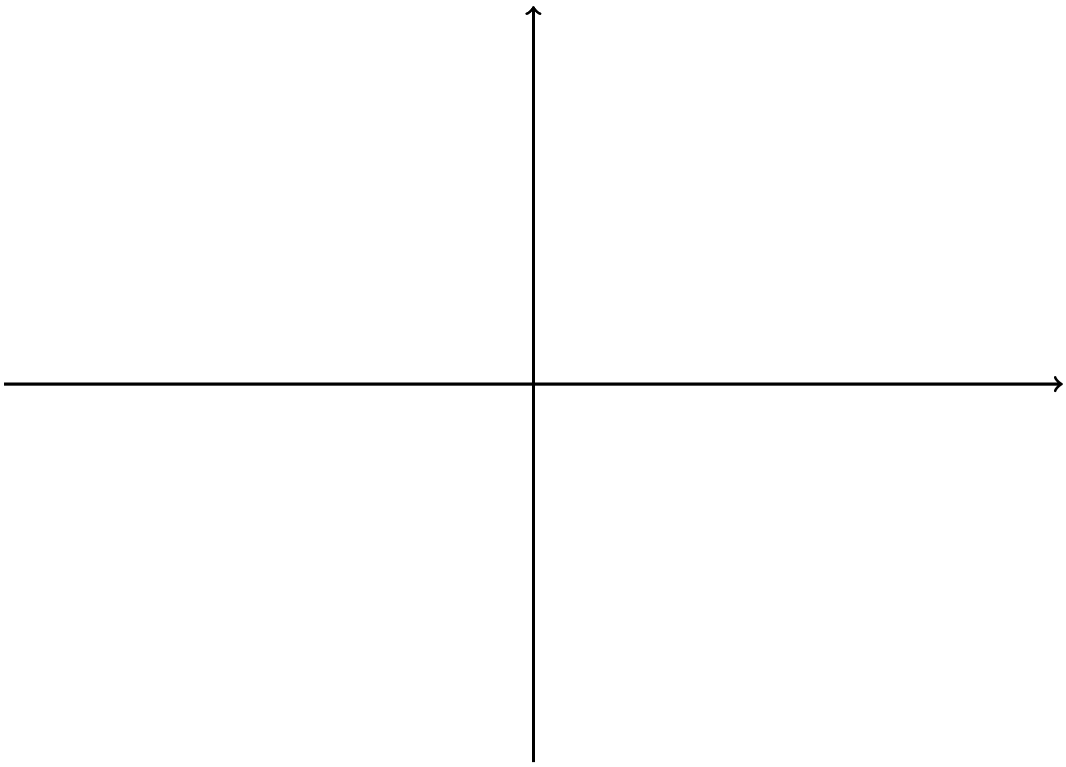
Proposition 82 (Propriétés de sh)

1. sh est définie sur $\mathbb{R}$.
2. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
3. sh est impaire.
4. sh est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $\mathrm{sh}(0) = 0$.
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$
7. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \mathrm{sh}(x) \geqslant x$.
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$.



Proposition 83 (Propriétés de ch)

1. ch est définie sur $\mathbb{R}$.
2. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.
3. ch est paire.
4. ch est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. $\mathrm{ch}(0) = 1$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

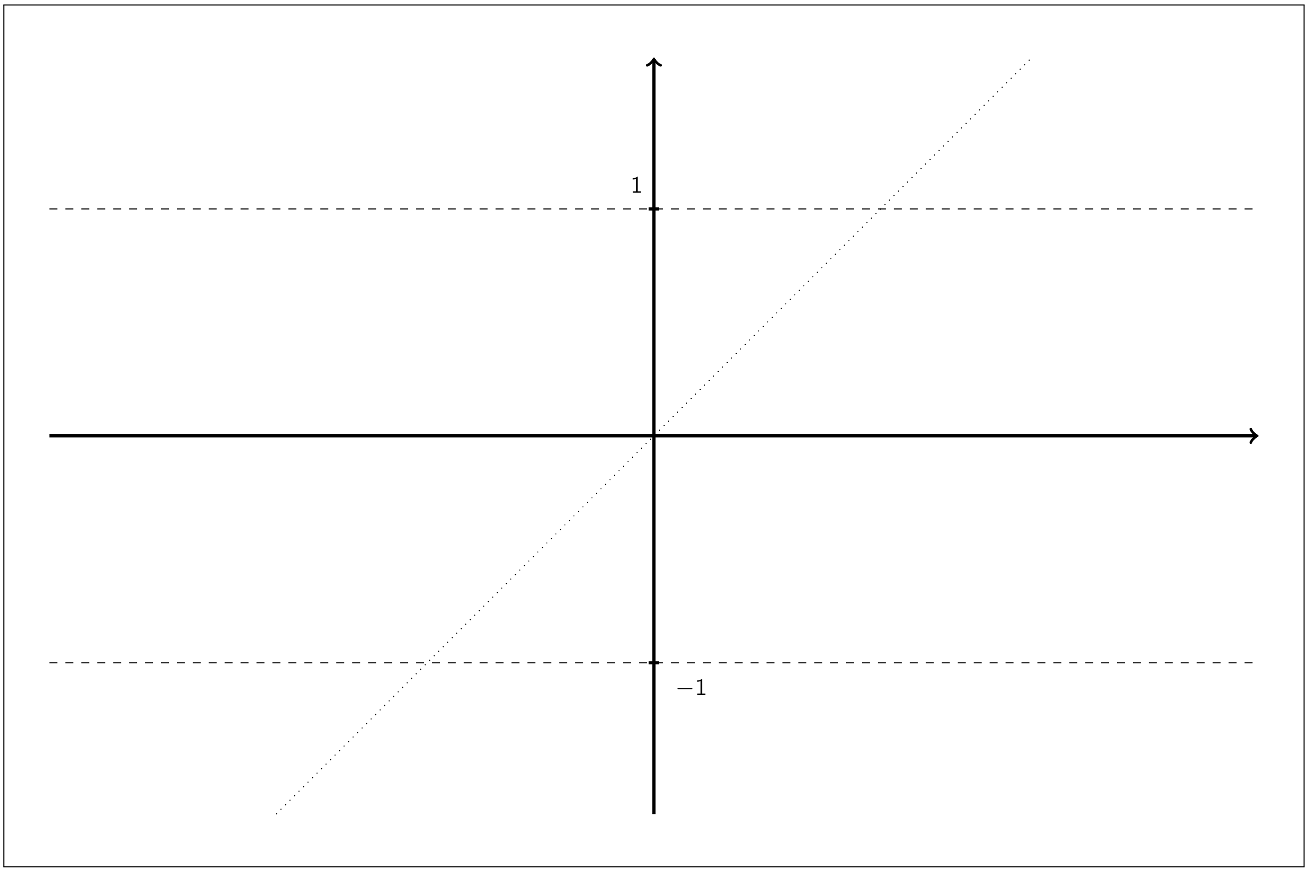


Proposition 84 (Une identité remarquable)

Pour tout x réel, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Proposition 85 (Propriétés de th)

1. th est définie sur $\mathbb{R}$.
2. th est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}(x)^2 = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$.
3. th est impaire.
4. th est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. $\text{th}(0) = 0$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = +1$
7. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{th}(x) \leqslant x$.
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{th}(x)}{x} = 1$.

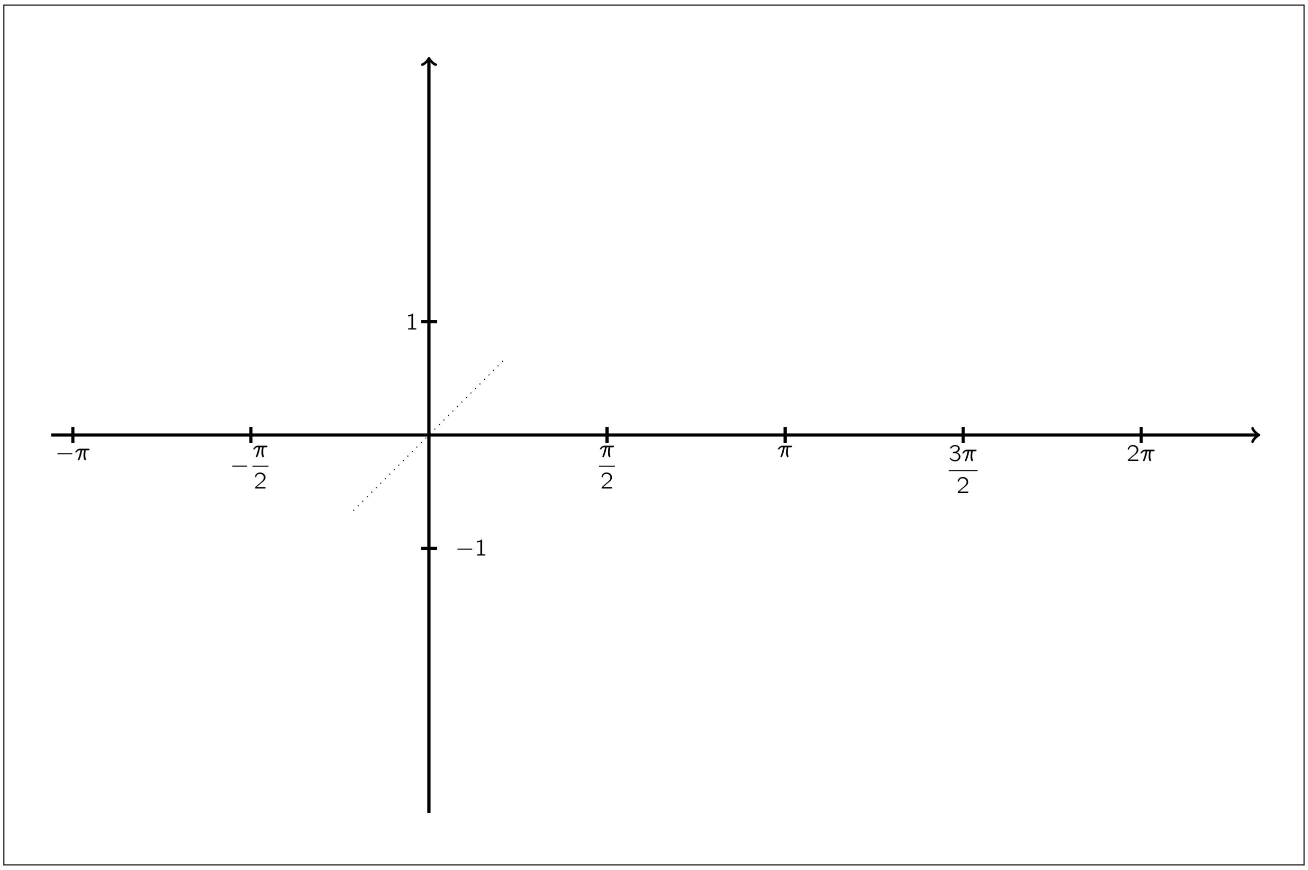


3.5 Fonctions circulaires

On ne définira pas sin, cos, tan mais en donnerons les propriétés principales.

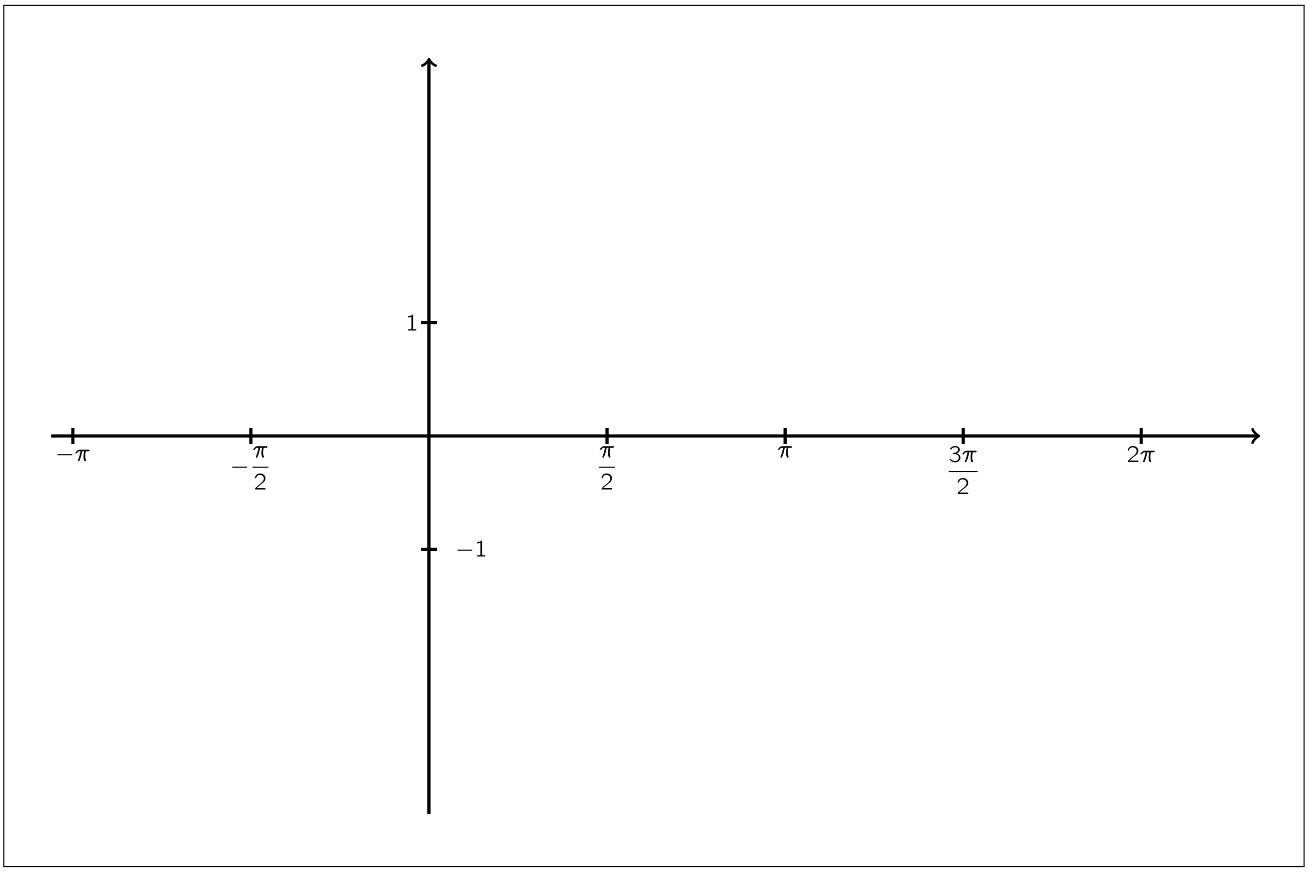
Proposition 86 (Propriétés de sinus)

1. sin est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1,1]$
2. sin est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
3. sin est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.
4. Pour tout x réel, $(\sin(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Z},\ x \in [2p\pi, \pi + 2p\pi])$.
5. sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Pour tout entier n, sin est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
7. sin est croissante sur les intervalles de la forme $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ où $k \in \mathbb{Z}$, et décroissante sur les intervalles de la forme $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, où $k \in \mathbb{Z}$.
8. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
9. sin n'a pas de limite en $\pm\infty$
10. Inégalités classiques : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$ et $\forall x \in [0, \pi/2],\ \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x)$.
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



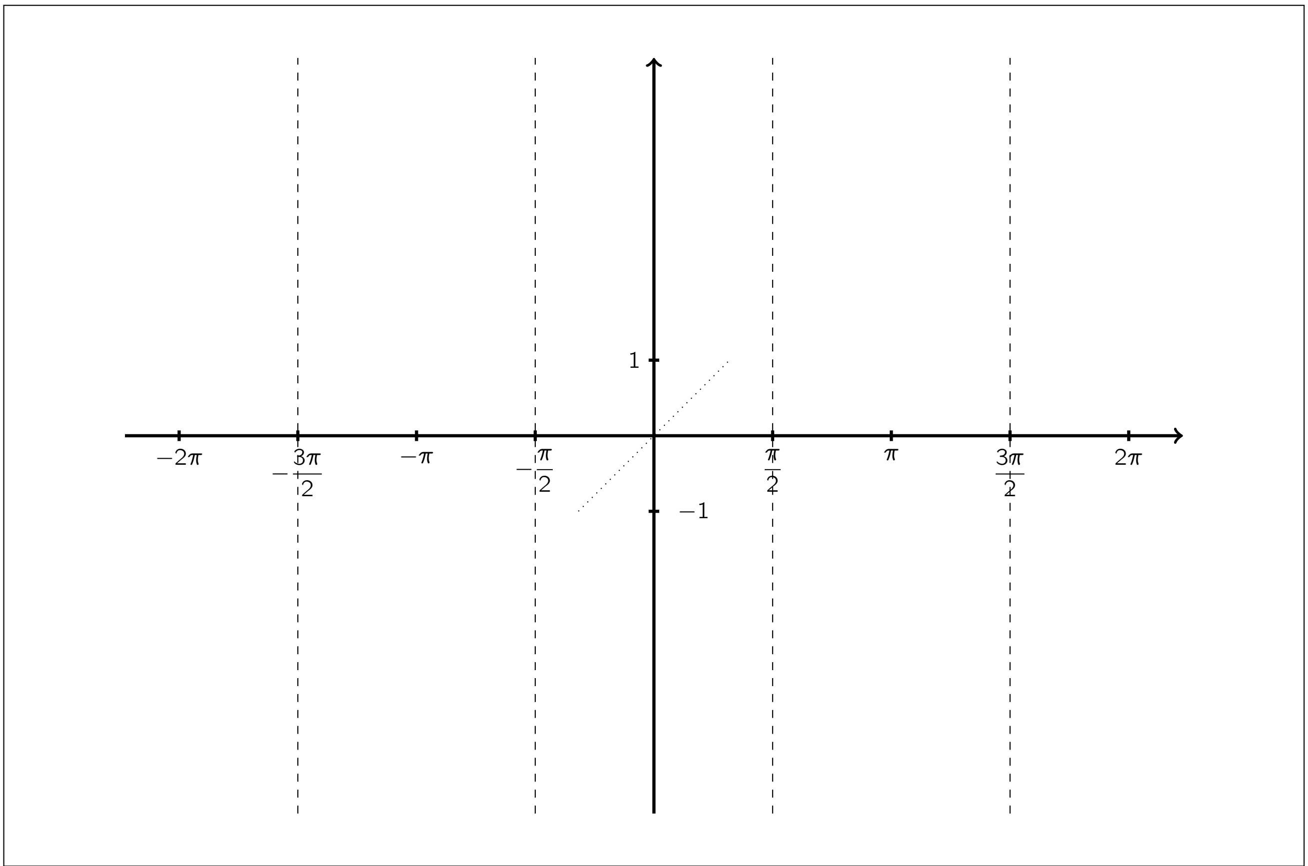
Proposition 87 (Propriétés de cosinus)

1. cos est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1, 1]$
2. cos est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
3. cos est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.
4. $(\cos(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow \left(\exists p \in \mathbb{Z},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2p\pi, \frac{\pi}{2} + 2p\pi\right]\right)$.
5. cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
6. pour tout entier n, cos est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
7. cos est croissante sur les intervalles de la forme $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$ et décroissante sur les intervalles de la forme $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$.
8. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
9. cos n'a pas de limite en $\pm\infty$
10. Inégalités classiques : $\forall x \in [0, \pi/2],\ 1 - \frac{2x}{\pi} \leqslant \cos(x)$.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.



Proposition 88 (Propriétés de tangente)

1. tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
2. tan est π-périodique : $\forall x\in\mathbb{R}, \tan(x+\pi)=\tan(x)$.
3. tan est impaire : $\tan(-x)=-\tan(x)$.
4. $(\tan(x)\geqslant 0)\Leftrightarrow\left(\exists p\in\mathbb{Z},\ x\in\left[p\pi, p\pi+\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
5. tan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$.
6. tan est croissante sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, où $k\in\mathbb{Z}$.
7. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
8. tan n'a pas de limite en $\pm\infty$, mais $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty$.
9. Inégalités classiques : $\forall x\in[0,\pi/2], \tan(x)\geqslant x$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}=1$.



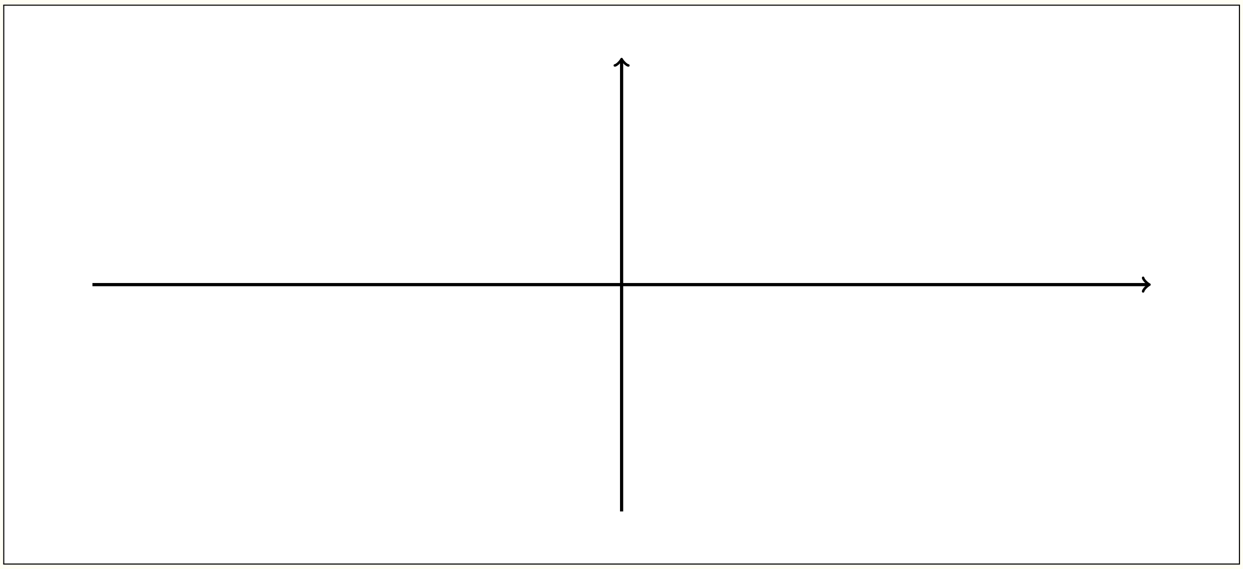
Proposition 89 (Formules de l'arc moitié)

Soit x un réel qui ne soit pas un multiple de π. Notons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

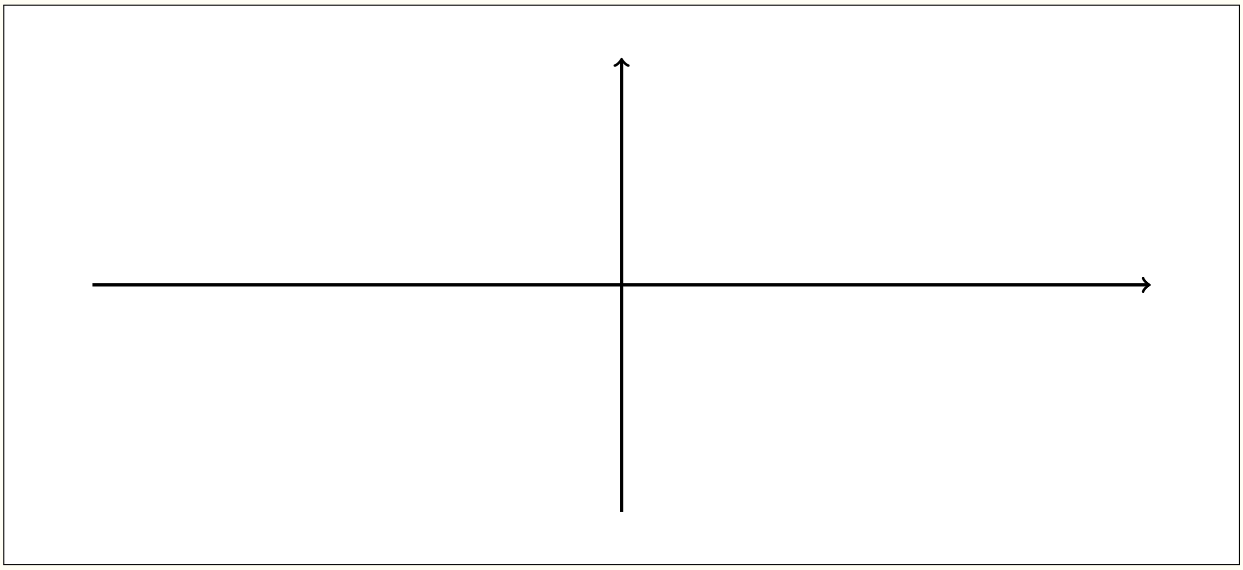
Alors $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exemple 90

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il est naturel de se demander quelle peut être l'allure de $x \mapsto f(x)\sin(x)$.

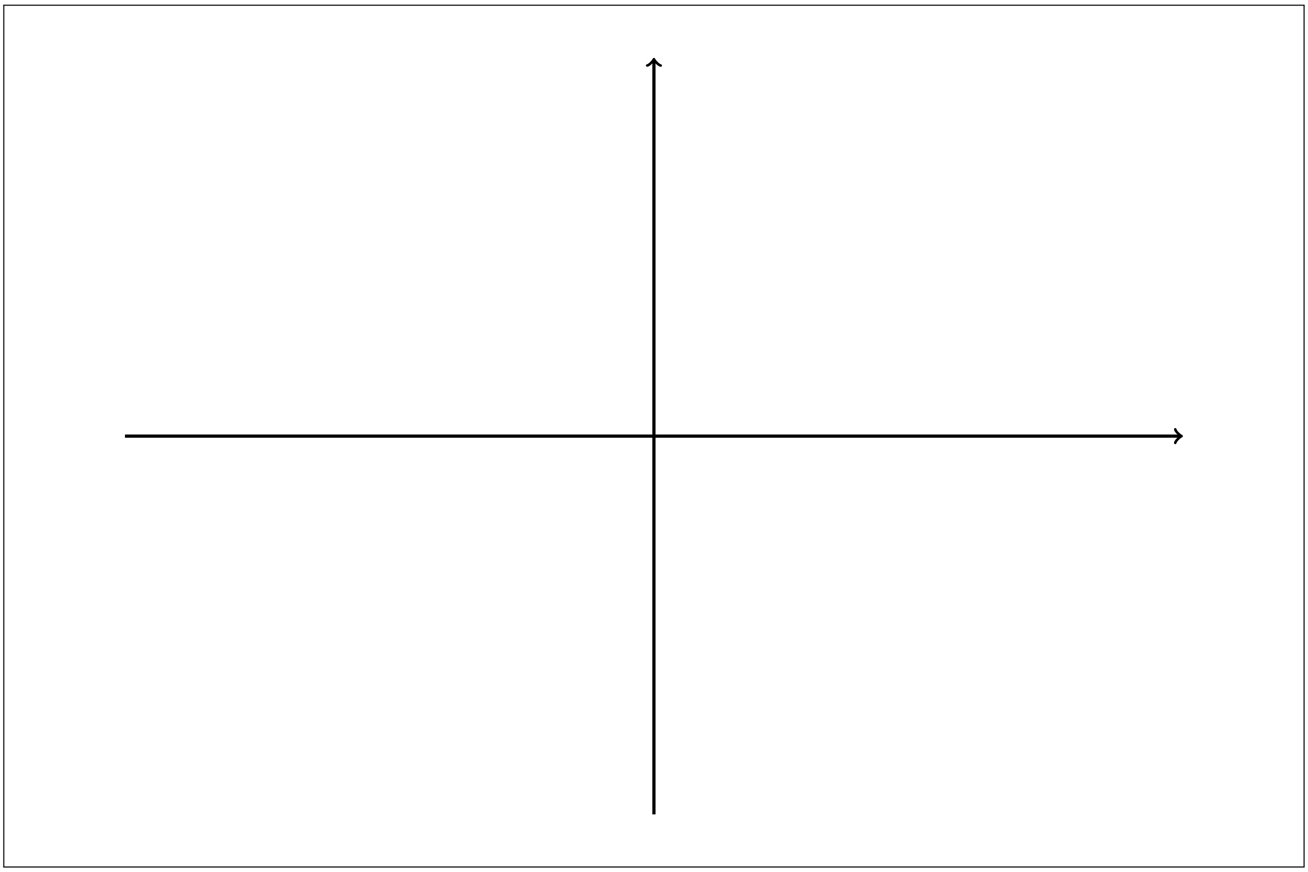


Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.



Exercice 91

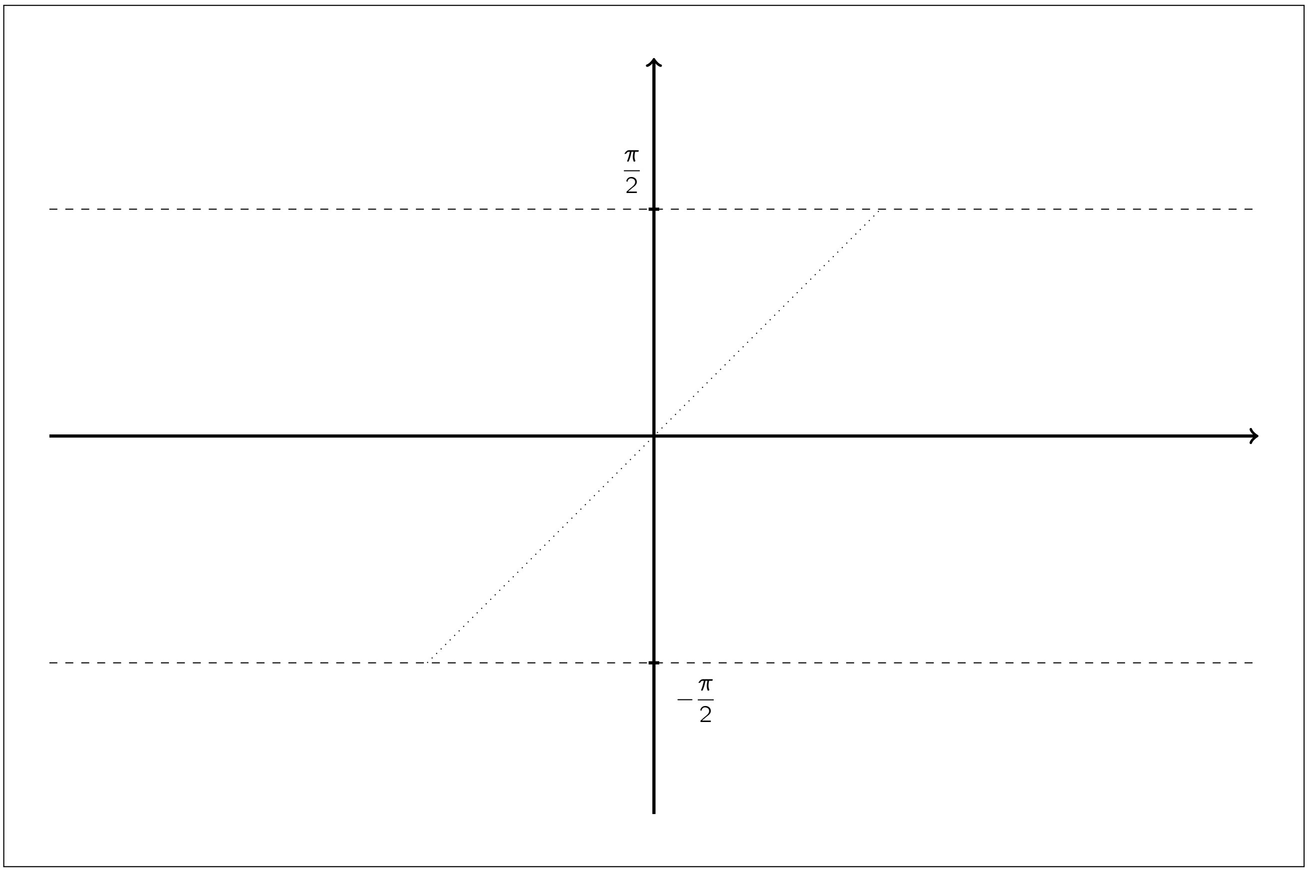
Soient ω et φ deux réels très proches. Dessiner le graphe de $t \mapsto \cos(\omega t) + \cos(\varphi t)$. Commentaire ?



3.6 Fonctions circulaires réciproques

Proposition 92 (et définition)

La fonction tan définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On nomme sa bijection réciproque arc tangente et on la note Arctan.

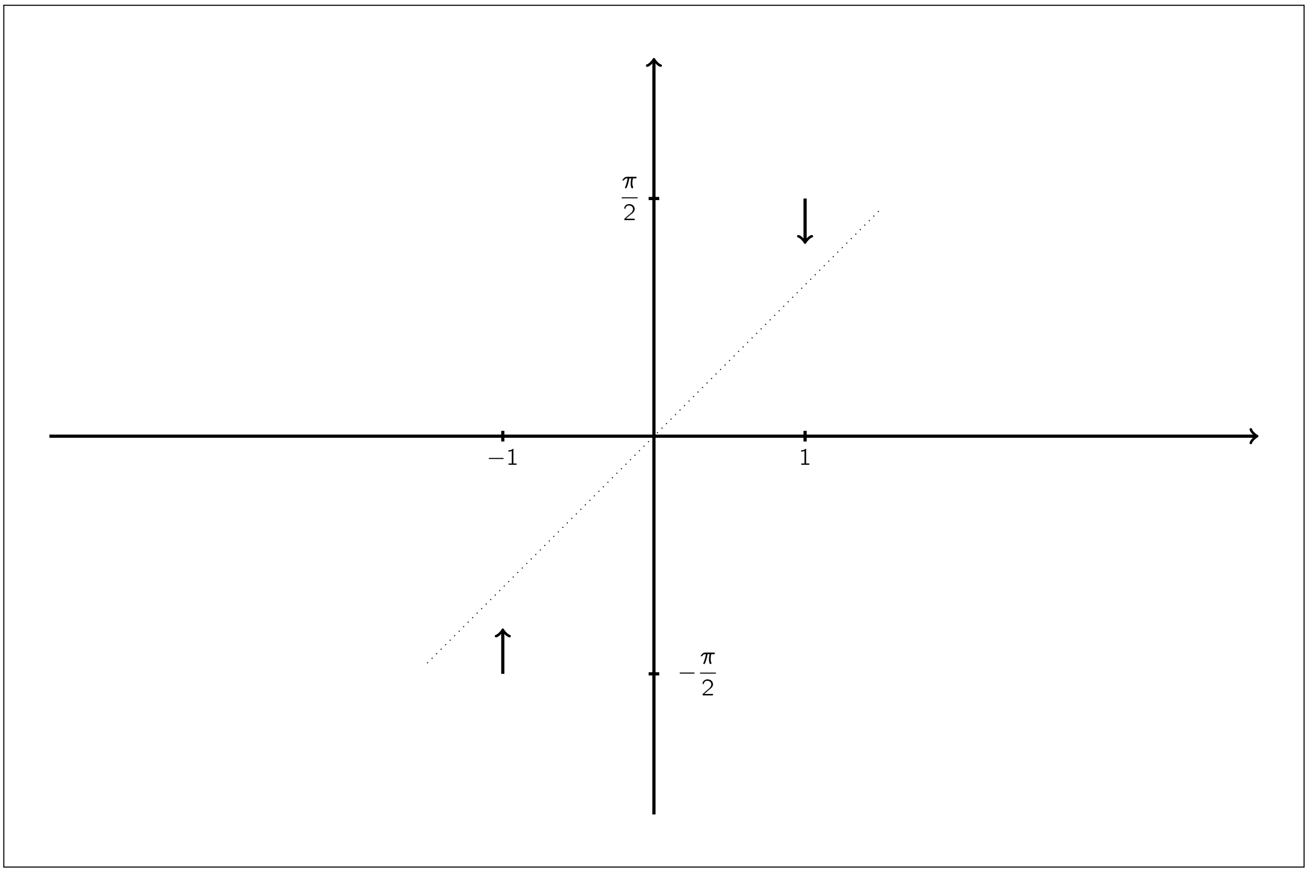


Proposition 93 (Propriétés de Arctan.)

1. Arctan est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Arctan est impaire.
4. Arctan est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Valeurs : $\text{Arctan}(0) = 0$, $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, $\text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$, $\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$.
6. Limites en $\pm\infty$.
7. Inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{Arctan}(x) \leqslant x$.
8. Identité classique : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \text{sgn}(x).\dfrac{\pi}{2}$.

Proposition 94 (et définition)

La fonction sin définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On nomme sa bijection réciproque arc sinus et on la note Arcsin.

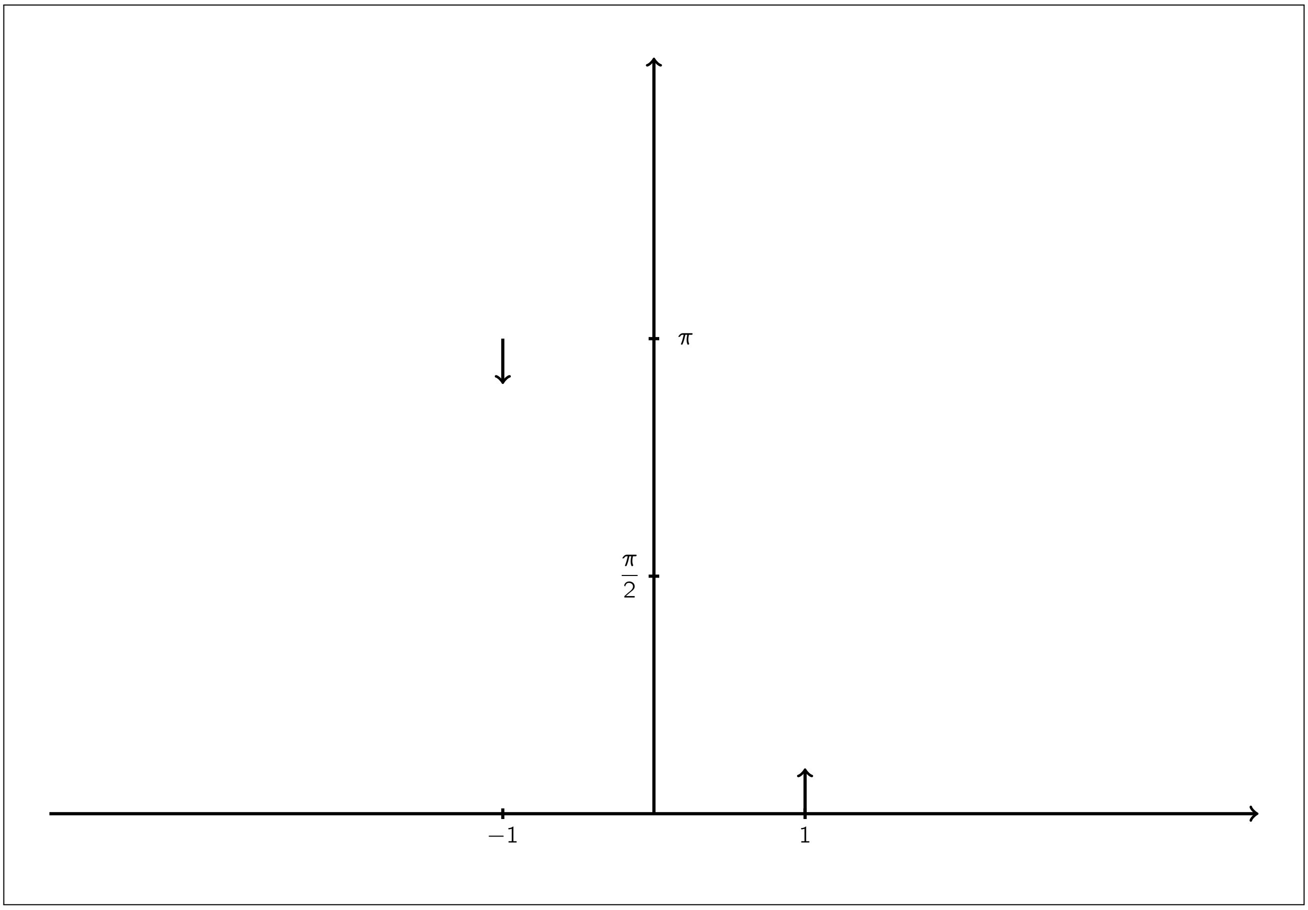


Proposition 95 (Propriétés de Arcsin.)

1. Arcsin est définie sur $[-1, 1]$.
2. Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ (mais ni en -1, ni en 1) et pour tout réel x, $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Arcsin est impaire.
4. Arcsin est croissante sur $[-1, 1]$.
5. Valeurs remarquables :
   $\text{Arcsin}(0) = 0$, $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$.
6. Inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{Arcsin}(x) \geqslant x$.
7. Limite remarquable : $\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arcsin}(x)}{x} = 1$.

Proposition 96 (et définition)

La fonction cos définit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On nomme sa bijection réciproque arc cosinus et on la note Arccos.



Proposition 97 (Propriétés de Arccos.)

1. Arccos est définie sur $[-1, 1]$.
2. Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ (mais ni en -1, ni en 1) et pour tout réel x, $\text{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $x \mapsto \text{Arccos}(x) - \dfrac{\pi}{2}$ est impaire.
4. Arccos est décroissante sur $[-1, 1]$.
5. Valeurs remarquables :
   $\text{Arccos}(0) = 1$, $\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, $\text{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $\text{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, $\text{Arccos}\,(1) = 0$.
6. Inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{Arccos}(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} - x$.
7. Limite remarquable : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(x)}{x} = 1$.

Proposition 98 (Propriétés mutuelles de Arcsin et Arccos)

Soit x un réel de $[-1, 1]$. Alors

1. $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) \geqslant 0$ et $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) \geqslant 0$.
2. $\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Point de méthode 99

Retrouver proprement la dérivée de Arcsin et Arccos, et démontrer la relation liant Arcsin à Arccos.

Proposition 100 (Composition des fonctions et de leurs réciproques)

Pour tout x dans $[-1,1]$, pour tout y dans $\mathbb{R}$,

$$\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x,\ \cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x,\ \tan(\mathrm{Arctan}(y)) = y.$$

L'inverse n'est pas toujours vrai : pour tout x dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, y dans $[0,\pi]$ et z dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x,\ \mathrm{Arccos}(\cos(y)) = y,\ \mathrm{Arctan}(\tan(z)) = z.$$

Exercice 101

Tracer les graphes de $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sin(x))$ et $g : x \mapsto \mathrm{Arccos}(\cos(x))$.