

MPSI1 – Programme de colles  
Semaine 02 – du 23 au 27 septembre 2024

### Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;
- résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Notations  $\sum_{i \in I} a_i$ ,  $\prod_{i \in I} a_i$ . Cas où  $I$  est vide.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k$ .

Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ .

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Exemples de sommes triangulaires.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

Convention  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k < 0$  et  $k > n$ .

Formule du binôme dans  $\mathbb{R}$ .

#### b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

Interprétation géométrique : intersection de droites dans  $\mathbb{R}^2$ , de plans dans  $\mathbb{R}^3$ .

Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.

Notations  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ( $\lambda \neq 0$ ),  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .

#### c) Inégalités

Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Compatibilité avec les opérations. Intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type  $|x - a| \leq b$ .

Dans  $\mathbb{R}$ , parties majorées, minorées, bornées.

Majorant, minorant ; maximum, minimum.

Partie entière d'un nombre réel.

Notation  $\lfloor x \rfloor$ .

#### d) Trigonométrie

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.

Notation  $a \equiv b [2\pi]$ .

Relation de congruence modulo  $2\pi$  sur  $\mathbb{R}$ .

Cosinus et sinus de  $\pi \pm x$ , de  $\frac{\pi}{2} \pm x$ .

Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.

Cosinus et sinus des angles usuels.

Formules d'addition  $\cos(a \pm b)$ ,  $\sin(a \pm b)$ . Cas particulier des formules de duplication :  $\cos(2a)$ ,  $\sin(2a)$ .

On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant  $\cos(a)\cos(b)$ ,  $\cos(a)\sin(b)$ ,  $\sin(a)\sin(b)$ .

Fonctions circulaires cosinus et sinus.

On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , inégalité  $|\sin(x)| \leq |x|$ .

Fonction tangente.

Notation  $\tan$ . Dérivée, variations, représentation graphique.

Tangente de  $\pi \pm x$ . Tangente des angles usuels.

Interprétation sur le cercle trigonométrique.

Formule d'addition  $\tan(a \pm b)$ .

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de  $\cos(t)$  et  $\sin(t)$  en fonction de  $\tan(t/2)$ .

Programme de cette colle : du calcul, du calcul, du calcul ! Poser essentiellement des exercices mettant en jeu :

- des calculs de sommes ou de produits simples ou doubles
- résolutions de petits systèmes linéaires.
- inégalités dans  $\mathbb{R}$
- trigonométrie

### Exemples de questions de cours

1. Soit  $n$  un entier naturel. Donner les valeurs de  $\sum_{k=0}^n k$ , de  $\sum_{k=0}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n k^3$  et démontrer l'un des 3 résultats énoncés (selon l'envie de la colleuse ou du colleur).
2. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
3. Coefficient binomial : définition et formules  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  ainsi que  $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$ .
4. Formule de Pascal + les coefficients binomiaux sont entiers.
5. Calcul de  $\sum_{k=0}^n kx^k$  par une méthode au choix.
6. Factorisation de  $a^n - b^n$  (énoncé et démonstration) et de  $a^n + b^n$  quand  $n$  est impair.
7. Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.
8. Calcul de  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ , de  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ , de  $\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ .
9. Dérivabilité de  $\sin$  en 0, ou en tout réel. Dérivabilité de  $\cos$ . (inégalité  $|\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|$  à prouver aussi)
10. Formules de trigonométrie.
11. Valeur absolue d'un produit.
12. Inégalité triangulaire sur les réels, cas d'égalité.