MPSI1 – Programme de colles
Semaine 03 – du 30 septembre au 4 octobre 2024

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Contenus	Capacités & commentaires
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation $\tan$. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	Image du conjugué dans le plan complexe.
Module.	Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$.	Notation $\mathbb{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	

Programme de cette colle : trigonométrie et complexes.

- trigonométrie
- complexes. Pas d'équations polynomiales (juste le cours sur la factorisation de $P(z)$ par $z - a$), pas de racines de l'unité, pas de géométrie !

Exemples de questions de cours

1. Dérivabilité de sin en 0 , en tout réel. Dérivabilité de $\cos$. (Inégalité $[\sin x[\leq |x| \leq |\tan x|$ à prouver).
2. Formules de trigonométrie avec 1a tangente de 1'arc moitié.
3. Caractérisation des rée1s parmi les complexes avec partie réelle, partie imaginaire et conjugué (chaîne circulaire d'implications).
4. Caractérisation des rée1s avec 1e module, cas des réels positifs. Inégalités triangulaires sur les complexes, cas d'égalité.
5. Le sous-groupe multip1icatif des nombres complexes de module 1 .
6. Retrouvailles de manières indépendantes des formules de trigonométrie (addition, duplication, linéarisation, factorisation) à 1 'aide des nombres complexes.
7. Calcul de 1a somme des $\cos(kx)$ pour k allant de 0 à n.
8. Pour une valeur donnée de n, expression de $(\cos x)^n$ comme combinaison linéaire des $\cos(kx)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
9. Pour une valeur donnée de n, expression de $\cos(nx)$ comme combinaison linéaire des $(\cos x)^k$, pour $k \in \mathbb{N}$.
10. Argument principal d'un nombre complexe de module 1. Existence et unicité.
11. L'équation $\exp z = b$ de paramètre b et d'inconnue z des nombres complexes.
12. Pour une fonction polynôme non nulle f à coefficients complexes de petit degré, factorisation de $f(z) - f(a)$.