TD 4
Fonctions usuelles

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Tracer le graphe de la fonction : $x \mapsto x|x-1| + |2-x| - x^2$.

Exercice 2. ●◐○ Montrer que le point de contact de la tangente à la courbe d'équation $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, issue de O a une ordonnée indépendante de a.

Exercice 3. *Autour de x^x.* ●●○ *La question 1 est indépendante des deux autres.*

1. Étudier $x \mapsto x^x$.
2. Montrer que pour tout (x, y) de $]0, 1[^2$, on a $x^y \geqslant \dfrac{x}{x+y}$.
3. En déduire que pour tout (x, y) de $]0, 1[^2$, on a $x^y + y^x \geqslant 1$.

Exercice 4. ●●○ On considère la fonction f définie par $f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x} \end{array}\right.$

1. Étudier la fonction f, en précisant les limites aux bornes de définition et la valeur des extremums.
2. Tracer l'allure de la courbe de f.
3. (Une jolie applciation arithmétique) Déterminer les entiers naturels non nuls n et p vérifiant $n^p = p^n$.
4. Quel est le plus grand nombre entre e^π et π^e ?
5. Tracer sur un même graphe $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 2^x$.
6. Soit n dans $\mathbb{N}$. Donner le nombre de solutions de l'équation $e^x = x^n$.
7. Résoudre l'équation $|\cos(x)|^{|\sin(x)|} = |\sin(x)|^{|\cos(x)|}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. *Quelques calculs sur les fonctions trigonométriques et réciproques.*

1. Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kb)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).
2. Calculer $\cos(\mathrm{Arctan}(x))$ et $\sin(\mathrm{Arctan}(x))$ ($x \in \mathbb{R}$).

Exercice 6.
1. Soient $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'argument principal de $a + ib$ est $\mathrm{Arctan}\dfrac{b}{a}$. Qu'en est-il si $a < 0$?
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy \notin \mathbb{R}_-$. Montrer que l'argument principal de z est donné par :
$$2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exercice 7. ●●○ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2.\mathrm{Arctan}(\mathrm{th}(x)) = \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(2x))$.

Exercice 8. *Vers la fonction* Argch. ●●○

1. Montrer que $\forall y \in [1, +\infty[$, $\exists! x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{ch}(x) = y$. On cherchera une expression explicite. On nomme la fonction qui à $y \in \mathbb{R}_+$ associe l'unique x dans $\mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{ch}(x) = y$ « argument cosinus hyperbolique » et on la notera Argch.

2. Déterminer les variations de Argch et tracer l'allure de son graphe.

3. Dériver Argch.

4. Simplifier les expressions suivantes, en fonction de la valeur du réel x

(a) $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x))$

(b) $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x))$

(c) $\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x))$

2 Étude de fonctions, graphes

Exercice 9. ◐○○ Tracer l'allure du graphe des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto 2e^{x+3} + 3$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{3-x}$.

3. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

4. $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\tan(x))$.

Exercice 10. ◐○○ Étudier les fonctions suivantes

1. $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

2. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{|\ln(x)|}{x}}$.

Exercice 11. ●●○ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\mathrm{ch}(x))$.

1. Justifier que f est bien définie.

2. Étudier le signe et les variations de cette fonction, et tracer sa courbe représentative.

3. Soit x_0 un réel. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0. On nomme $b(x_0)$ son ordonnée à l'origine.

4. Étudier la fonction b, et tracer sa courbe représentative.

Exercice 12. ●●● Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le graphe de f admette deux centres de symétrie. Montrer qu'il existe g affine, h périodique, telles que $f = g + h$.

3 Aspects calculatoires et analytiques

Exercice 13. ◐○○ Soit $a > 0$ différent de 1, x un réel. Calculer $y = \log_a\left[\log_a\left(a^{(a^x)}\right)\right]$.

Exercice 14. *Formules de linéarisation et de duplication.* ◐○○

1. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\cos^3(x).\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sin^8(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\mathrm{ch}^2(x)\mathrm{sh}^3(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathrm{ch}^8(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Proposer des formules pour $\mathrm{sh}(a+b)$ et $\mathrm{ch}(a+b)$.

Exercice 15. ●○○ –●●● Dessiner le graphe des fonctions suivantes (on fera très attention à leur ensemble de définition).

1. $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}\right)$

2. $g : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$

3. $h : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\sqrt{1+x^2}-x)$

Exercice 16. ●○○ Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $2^x + 3^x = 5$.

Exercice 17. ●○○ Déterminer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

$$\frac{x^3-2x^5}{4x^5+1}, \quad \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{x}, \quad \sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}.$$

Exercice 18. ●◐○

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}(ka), \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sh}(ka), \qquad W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(a+kb)$$

Exercice 19. ●◐○ Résoudre le système $\begin{cases} \log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7} \\ x.y = 256 \end{cases}$

Exercice 20. ●◐○ Montrer la relation suivante : $4\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 21. ●◐○

1. Rappeler la formule donnant $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

2. Montrer que si l'on prend 7 réels, il y en a au moins deux, x et y, vérifiant

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 22. *Fonction* Argsh. ●●○

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique t dans $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sh}(t) = x$. On appelle ce réel t l'argument sinus hyperbolique de x et on le note $\mathrm{Argsh}(x)$. La fonction Argsh est ainsi la bijection réciproque de sh.

2. Tracer l'allure du graphe de Argsh. Préciser ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Déterminer une expression de la dérivée de Argsh.

4. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Argsh}(2x\sqrt{x^2+1}) = 2\mathrm{Argsh}(x)$$

Exercice 23. *Autour de la fonction* th. ●◐○

1. Soient a et b deux réels. Montrer que $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$. On admettra que, de même, $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.

2. Déduire des formules précédentes une formule pour $\text{th}(a+b)$.

3. Soit y dans $]-1,1[$. Résoudre l'équation

$$\text{th}(x) = y,$$

d'inconnue réelle x. On fera un changement de variables $X = e^x$.

4. Démontrer que th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On note Argth et on prononce « argument tangente hyperbolique » sa bijection réciproque.

5. Soit t un réel dans $]-1,1[$. Simplifier $\text{th}(\text{Argth}(t))$, $\text{ch}(\text{Argth}(t))$ et $\text{sh}(\text{Argth}(t))$.

6. On admet la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \text{Argth}(x)$. Montrer que sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

7. Montrer que pour tout x dans $[0,1[$, $\text{th}(x) \leqslant x \leqslant \text{Argth}(x)$.

8. Représenter sur un même graphe les courbes de $x \mapsto \text{th}(x)$ et $x \mapsto \text{Argth}(x)$.

Exercice 24. *Séries de sinus hyperboliques*. ●●○ On définit, pour tout entier naturel n, la somme S_n par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right).$$

On rappelle que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$.

1. Détermination de la limite de S_n

(a) Montrer que pour tout réel positif x, $\text{sh}(x) \geqslant x$.

(b) En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On pose, pour tout p dans $\mathbb{N}$,

$$\mathcal{S}_n^p = \sum_{k=n}^{np} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Pour étudier la limite de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$, on va d'abord établir une inégalité utile sur le sinus hyperbolique.

2. Pour tout x réel, on pose $f(x) = e^{\text{sh}(x)} - (x+1)$.

(a) Calculer f' et montrer que $f''(x) = (\text{sh}(x) + \text{ch}^2(x))e^{\text{sh}(x)}$.

(b) Exprimer f'' en fonction de e et de sh uniquement.

(c) En déduire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x réel.

(d) En déduire

$$\forall x > -1,\ \ln(x+1) \leqslant \text{sh}(x).$$

(e) En déduire

$$\forall x \in [0,1[,\ \ln(x+1) \leqslant \text{sh}(x) \leqslant \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

3. Étude de $\mathcal{S}_n^p$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant \mathcal{S}_n^p \leqslant \ln\left(\frac{np}{n-1}\right).$$

(c) En déduire la limite de $\mathcal{S}_n^p$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Indications.

1 Distinguer trois zones : $x \in]-\infty, 1]$, $x \in [1, 2]$ et $x \in [2, +\infty[$.

2 Commencer par « Soit $a > 0$ ». Déterminer ensuite la tangente au graphe en un point x_0, et chercher x_0 tel que cette tangente passe par O.

3
1. Étudier $\varphi : x \mapsto \ln(x) - \ln(x+y) - y\ln(x) = (1-y)\ln(x) - \ln(x+y)$
2. Conséquence directe

5
1. Utiliser que $\sin(a+kb) = \mathfrak{Im}(e^{ia}(e^{ib})^k)$.
2. Utiliser l'expression de $\cos^2$ en fonction de tan.

6 Écrire $z = \rho e^{i\theta} = \dots$.

7 Démontrer que ces quantités ont même tangente et vérifier qu'ils appartiennent au même intervalle.

8
1. Commencer par « soit y » ...
2. Deux possibilités : utiliser les variations de ch ou l'expression exacte.
3. Idem !
4. Attention, penser que $\cos(\text{Arccos}(x))$ et $\text{Arccos}(\cos(x))$ ne se simplifient pas toutes deux : c'est pareil pour ch.

9
1. Faire des translations.
2. C'est une homographie.
3. C'est un graphe modulé.
4. Attention, ce n'est pas toujours égal à x.

10

11
1.
2. Attention à la dérivée d'une composée.
3. Prendre $x = 0$ dans l'équation de la tangente.
4.

12 Poser $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ les deux centres de symétrie. Considérer comme g la fonction affine qui passe par ces deux points.

13 Utiliser que $\log_a$ est la bijection réciproque de $x \mapsto a^x$.

14 Utiliser le binôme de Newton.

15
1. Poser $y = \dfrac{x}{2}$ et discuter selon le signe de $\cos(y)$.
2. Poser $x = \sin(\theta)$
3. Poser $\theta = \text{Arctan}(x)$ et montrer que $\text{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$.

16 Trouver une solution, montrer que c'est la seule en étudiant la fonction.

17 Utiliser proprement : le fait que l'on puisse prendre les termes polynomiaux de plus haut degré, les croissances comparées (si nécessaire), la quantité conjuguée.

18 Utiliser le fait que $\text{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ et procéder de même que pour $\sum \sin(k\theta)$.

19 Déterminer une équation vérifiée par $\log_2(x)$ et $\log_2(y)$. Penser notamment que $\log_x(y) = \dfrac{\log_2(y)}{\log_2(x)}$.

20 Prendre l'arctangente des deux memebres.

21 Si $(x_1, \dots, x_7)$ sont ces 7 réels, les interpréter comme $(\tan(\theta_1), \dots, \tan(\theta_7))$, et utiliser le principe des tiroirs.

23
1. C'est du quasi-cours.
2. Revoir comment on obtient $\tan(a+b)$.
3. Indication déjà donnée.
4.
5. Penser que $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ et $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.
6.
7. Faire des études de fonctions
8.

22 Exercice déjà fait en classe avec ch.

24
1. (a) Faire une étude de fonctions.
   (b) Minorer chaque terme de la somme.
2. (a)
   (b) Penser que $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.
   (c)
   (d) Déduire des questions précédente une égalité que l'on passera au ln.
   (e) Pour l'égalité de droite, utiliser $y = -x$.
3. (a) Utiliser l'inégalité précédente.
   (b) Sommer et reconnaître un télescopage.
   (c) Utiliser le théorème des gendarmes.