N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

TD 3
Nombres complexes

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Soient a et b deux nombres complexes de module 1. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est un nombre réel.

Correction

On sait que $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$ et $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$. Alors

$$\overline{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\overline{b}} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{ab}} = \frac{ab}{ab}\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{ab}} = \frac{b+a}{ab+1},$$

donc $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est égal à son conjugué, donc il est réel.

Exercice 2. *Inégalité triangulaire généralisée.* ●●○ Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont n complexes non nuls, on a

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|,$$

avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_1.$$

On précisera **TRÈS PROPREMENT** *l'hypothèse de récurrence à démontrer.*

Correction

Montrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, où

$(\mathcal{P}_n)$: $\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$, $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$,
avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_n$.

Initialisation : $\mathcal{P}_2$ est vraie par l'inégalité triangulaire.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier n. Soient $z_1, \dots, z_{n+1}$ $n+1$ complexes. Posons $Z = z_1 + \dots + \dots z_n$. Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |Z + z_{n+1}| \leqslant |Z| + |z_{n+1}|, \tag{1}$$

avec égalité si et seulement si il existe un réel λ strictement positif tel que $z_{n+1} = \lambda Z$.
Par l'hypothèse de récurrence,

$$|Z| \leqslant |z_1| + \dots + |z_n|, \tag{2}$$

avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_n$.
Donc

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |Z| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

Il y a égalité si, et seulement si il y a égalité dans (3) et (4), c'est-à-dire qu'il existe n réels strictement positifs $\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_n$$
$$z_{n+1} = \lambda Z = \lambda(z_1 + \cdots + z_n) = \lambda(z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n) = \lambda_{n+1} z_1,$$

avec $\lambda_{n+1} = \lambda(1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : Héréditaire et vraie au rang 2, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 3. ●○○ Extraire les racines suivantes :

1. les racines carrées de $3 + 4i$.

Correction

Soit $\omega = x + iy$ une racine de $3 + 4i$. Alors $x^2 - y^2 + 2ixy = 2 + 4i$. Donc $x^2 - y^2 = 3$. Et $x^2 + y^2 = |\omega|^2 = |3 + 4i| = 5$. Donc $2x^2 = 8$ donc $x = \pm 2$. De même, $2y^2 = 2$ donc $y = \pm 1$. De plus, $xy > 0$ donc les deux racines de $3 + 4i$ sont $\pm(2 + i)$.

2. les racines $5^{\text{èmes}}$ de -1.

Correction

On écrit $-1 = e^{i\pi}$ donc les racines 5-ièmes de -1 sont $\{e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{7\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}}\}$.

3. les racines n-ièmes de i $(n \in \mathbb{N}^*)$

Correction

On écrit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc les racines n-ièmes de i sont $\left\{e^{i\frac{\pi}{2} + \frac{2ik\pi}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

Exercice 4. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$. Calculer $S_{n,p} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$, puis $T_n = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1 + \omega)^n$.

Correction

On calcule S_n :

$$S_n = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k = \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{\frac{2ikn\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = 0 \text{ si } e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1 \\ n \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc si $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1$, i.e. si n divise k, $S_n = n$. Sinon, $S_n = 0$.

Ensuite, pour T_n, utilisons le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}(1+\omega)^n \\ &= \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}\omega^q \\ &= \sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^q. \end{aligned}$$

Or, $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^q$ est nulle dès que n ne divise pas q (par le calcul de $S_{n,p}$. Donc dans la somme pour q allant de 0 à n, seuls les termes 0 et n apporteront une contribution non nulle. DOnc

$$T_n = \binom{n}{0}\times n + \binom{n}{n}\times n = 2n.$$

Exercice 5. ●◐○

1. Soit θ un réel non nul. Montrer que $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = -i\tan\dfrac{\theta}{2}$.

Correction

On calcule

$$\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{-2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} = -i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

2. Résoudre l'équation $(1+z)^5 = (1-z)^5$.

Correction

Analyse. Soit z une solution de l'équation. Alors $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1$, i.e. $\dfrac{1+z}{1-z}$ est une racine cinquième de l'unité, i.e. on dispose de k dans $[\![0,4]\!]$ tel que $\dfrac{1+z}{1-z} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}$. Alors $1+z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}(1-z)$ donc $1+z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} - z\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}$, donc $z(1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}) = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1$, donc

$$z = \frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}-1}{1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}} = i\tan\left(\frac{ik\pi}{5}\right).$$

Donc les solutions sont dans l'ensemble $\left\{i\tan\left(\dfrac{ik\pi}{5}\right),\ k\in[\![0,4]\!]\right\}$.

Synthèse. Réciproquement, de tels complexes sont solution.

Exercice 6. *Polynômes de Tchebycheff de première espèce.* ●●○

1. Montrer que pour tout entier n, il existe un polynôme T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$

Correction

On sait que $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$. Par la formule du binôme de Newton,

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin(\theta))^k \cos(\theta)^{n-k}.$$

Or pour k pair, $(i\sin(\theta))^k$ est réel ; pour k impair il est imaginaire pur. Donc

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2p} (-1)^p \sin(\theta)^{2p} \cos(\theta)^{n-2p} + i \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]-1} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \sin(\theta)^{2p+1} \cos(\theta)^{n-2p-1}.$$

Donc

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2p} (-1)^p \sin(\theta)^{2p} \cos(\theta)^{n-2p}.$$

Or, $\sin(\theta)^{2p} = (\sin^2(\theta))^p = (1-\cos^2(\theta))^p$, donc

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-\cos^2(\theta))^p \cos(\theta)^{n-2p}.$$

Posons alors

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-X^2)^p X^{n-2p}.$$

L'existence de T_n est donc démontrée.

On admet la proposition suivante

Proposition 1

Si P et Q sont deux polynômes tels que pour tout θ dans $\mathbb{R}$, $P(\cos(\theta)) = Q(\cos(\theta))$, alors P et Q sont égaux.

En particulier, cette proposition permet d'avoir l'unicité de T_n. Le polynôme T_n est appelé n-ième polynôme de Tchebycheff de première espèce.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $T_{n+2}(z) = 2zT_{n+1}(z) - T_n(z)$.

Correction

Soit n un entier non nul. Alors

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta+\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta).$$

De même,

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta-\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta).$$

Donc

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta).$$

On en déduit que pour tout n non nul,

$$T_{n+1}(X) + T_{n-1}(X) = 2XT_n(X),$$

ou encore, pour tout n entier,

$$T_{n+1}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

3. Déterminer, par la méthode de votre choix, T_1, T_2, T_3, T_4.

Correction

$T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

Exercice 7. Soit θ réel et n entier non nul.

1. Factoriser $(z+1)^n - e^{2in\theta}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 8. *Quelques questions de géométrie*. **1.** Caractériser géométriquement la similitude définie par $z \mapsto (-1-\sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i$.

Correction

Déterminons d'abord le point fixe de cette transformation. On cherche ω tel que

$$(-1-\sqrt{3}i)\omega + 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i = \omega,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3}i)\omega &= 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i \\ &= (2+\sqrt{3}i)(1+i)\end{aligned}$$

donc

$$\omega = 1 + i$$

Soit alors M un point du plan d'affixe z, z' son image par la transformation. Écrivons alors $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$:

$$\begin{aligned} z' - \omega &= (-1 - \sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i - \omega \\ &= (-1 - \sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i - \left[(-1 - \sqrt{3}i)\omega + 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i\right] \\ &= (-1 - \sqrt{3}i)(z - \omega). \end{aligned}$$

Or, $-1 - \sqrt{3}i = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}$, donc

$$z' - \omega = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z - \omega).$$

Donc la transformation est une similitude de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$.

2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes $1 + i$, $z + i$ et $1 + iz$ soient alignés.

Correction

Soit z un complexe. L'alignement des points d'affixes $1+i$, $z+i$ et $1+iz$ se traduit par le fait que le nombre

$$\frac{z + i - (1 + i)}{(1 + iz) - (1 + i)},$$

quand il est défini, est d'argument 0 ou π modulo 2π, c'est-à-dire est réel. Or, si $(1 + iz) - (1 + i) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{z + i - (1 + i)}{(1 + iz) - (1 + i)} &= \frac{z - 1}{iz - i} \\ &= \frac{z - 1}{i(z - 1)} = -i \notin \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{z + i - (1 + i)}{(1 + iz) - (1 + i)}$ n'est pas réel si $(1 + iz) - (1 + i) \neq 0$. Si $(1 + iz) - (1 + i) = 0$, i.e. $z = 1$, les trois points sont alignés.
Donc l'ensemble des points z de $\mathbb{C}$ tels que les points d'affixes $1 + i$, $z + i$ et $1 + iz$ sont alignés est $\{1\}$.

3. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z, z^2 et z^3 soient alignés.

Correction

Soit z un point tel que z, z^2 et z^3 soient alignés. Supposons que $z \neq z^2$, c'est-à-dire que $z \neq 0$ et $z \neq 1$. La condition d'alignement s'écrit

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Or,
$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z^2 - 1}{z - 1} = z + 1.$$
La condition s'écrit donc $z + 1 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $z \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si $z \in \mathbb{R}$, les points d'affixes z, z^2 et z^3 sont alignés.

Stratégie. Le chapitre sur les nombres complexes a ceci de particulier qu'il reprend de nombreuses notions de Terminale, mais qu'il ajoute plusieurs nouveautés. À faire, dans l'ordre :

- Vérifier que vous savez faire des calculs de base : commencez par les calculs sur j (exercice 9), puis, si vous avez peur de ne pas savoir le faire, quelques calculs « de type Terminale » (exercices 10, 11), un exercice faisant intervenir la caractérisation importante du fait qu'un nombre est réel ou imaginaire (exercice 13).
- Vérifier que vous savez utiliser l'inégalité triangulaire (12) et résoudre une équation du second degré (exercice 16).
- Vérifier que vous savez manipuler les racines de l'unité et la méthode de l'angle moitié : exercices 18 et 19.
- Faire un peu de géométrie (c'est une partie moins importante en MPSI) : quelques items de l'exercice 22 et un peu de l'exercice 23.
- Un conseil : quelques exercices sont plus longs (ce sont des exercices de DM et de DS des années précédentes). Il peut être utile de les travailler quand vous en aurez le temps, pour vous entraîner à augmenter votre efficacité à l'écrit.

2 Généralités : écritures algébrique et géométrique, notions de trigonométrie

Exercice 9. ◐○○ Déterminer l'écriture, sous la forme $\rho e^{i\theta}$, des nombres j, j^{-1}, $\bar{j}$, $1+j$, $1+\bar{j}$, $-1-j$, $1+j+j^2$, $1+j^2+j^4$.

Correction

Oui, il s'agit du cours, mais il est important que vous sachiez faire des exercices de base sur les complexes.

Exercice 10. ◐○○ Déterminer les parties réelle et imaginaire de

$$z_1 = \frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i},\ z_2 = \frac{1+2i}{(2-i)(3+2i)},\ z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}},\ z_4 = 4e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

Correction

On donne les réponses brutes :

$$\mathfrak{Re}(z_1)=\frac{4\sqrt{3}}{7},\ \mathfrak{Im}(z_1)=\frac{1}{7},\ \mathfrak{Re}(z_2)=\frac{2}{13},\ \mathfrak{Im}(z_2)=\frac{2}{13}$$
$$\mathfrak{Re}(z_3)=-\frac{1}{2},\ \mathfrak{Im}(z_3)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathfrak{Re}(z_4)=2,\ \mathfrak{Im}(z_4)=-2i\sqrt{3}$$

Exercice 11. ●○○

1. Déterminer le module et un argument de

$$z_1=\frac{i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ z_2=1+\sin(x)-i\cos(x),\ z_3=1-i\tan(\theta).$$

Correction

- On calcule $|z_1|^2=\frac{6}{4}+\frac{2}{4}=2$, donc $|z_1|=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
- Soyons malins ! Écrivons

$$\begin{aligned}z_2&=1+\sin(x)-i\cos(x)\\&=1-i(\cos(x)+i\sin(x))\\&=1-ie^{ix}=1+e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\\&=e^{i\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\left(e^{-i\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}+e^{i\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)\\&=2e^{i\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

  Donc $|z_2|=2\left|\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ et un argument de z_2 est $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$ si $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0$, $\frac{x}{2}+3\frac{\pi}{4}$ si $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)<0$, et z_2 n'a pas d'argument si ce cosinus est nul.
- On écrit

$$z_3=1-i\tan(\theta)=\frac{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\frac{e^{-i\theta}}{\cos(\theta)},$$

  donc $|z_3|=\frac{1}{|\cos(\theta)|}$ et un argument de z_3 est $-\theta$ si $\cos(\theta)>0$, $-\theta+\pi$ sinon.

2. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3, z_2^4, z_3^n.

Correction

On utilise les formes exponentielles pour calculer les puissances.

- $z_1^3=(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}})^3=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-2\sqrt{2}i$. D'où $\mathfrak{Re}(z_1^3)=0$ et $\mathfrak{Im}(z_1^3)=-2\sqrt{2}$.
- $z_2^4=16e^{i(2x-\pi)}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-16\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i2x}$. Donc $\mathfrak{Re}(z_2^4)=-16\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x)$ et $\mathfrak{Im}(z_2^4)=-16\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)$.

- Enfin, si $n \in \mathbb{N}$, $z_3^n = \dfrac{e^{-in\theta}}{\cos(\theta)^n}$, d'où $\mathfrak{Re}(z_3^n) = \dfrac{\cos(n\theta)}{\cos(\theta)^n}$ et $\mathfrak{Im}(z_3^n) = -\dfrac{\sin(n\theta)}{\cos(\theta)^n}$.

Exercice 12. ●◐○ Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$

Quand y a-t-il égalité ?

Correction

On écrit $a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$ et $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}|a| + |b| &= \left|\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right| + \left|\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| + \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| \\ &= |a+b| + |a-b|.\end{aligned}$$

Il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans les deux inégalités triangulaires, i.e. ssi $a+b$ et $a-b$ sont positivement colinéaire, ainsi que $a+b$ et $-(a-b)$ sont positivement colinéaires, i.e. donc ssi $a+b=0$ ou $a-b=0$ (car $a-b$ et $-(a+b)$ ne peuvent pas être positivement colinéaires s'ils ne sont pas nuls !). Il y a donc égalité ssi $a=b$ ou $a=-b$.

Exercice 13. ●◐○ Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit imaginaire pur.

Correction

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On va raisonner par équivalences (on rappelle que $i\mathbb{R}$ désigne les imaginaires purs) :

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -\frac{z+1}{z-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = -\frac{z+1}{z-1} \\ &\Leftrightarrow (\overline{z}+1)(1-z) = (z+1)(\overline{z}-1) \\ &\Leftrightarrow \overline{z} - |z|^2 + 1 - z = |z|^2 - z + \overline{z} - 1 \\ &\Leftrightarrow 2|z|^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{U}.\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur si et seuelment si z est sur le cercle unité.

Exercice 14. ●●○ Déterminer les nombres complexes tels que z, $\dfrac{1}{z}$, $1+z$ aient le même module.

Correction

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Analyse. Supposons que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient même module. Alors $|z| = \dfrac{1}{|z|}$, donc $|z| = 1$, donc $z \in \mathbb{U}$. Donc on dispose de θ dans $\mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Donc $1+z = 1+\mathrm{e}^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)\mathrm{e}^{i\theta/2}$, de module égal à $2\cos(\theta/2)$. Donc z et $1+z$ ont même module si et seulement si $|2\cos(\theta/2)| = 1$, i.e. $|\cos(\theta/2)| = \dfrac{1}{2}$, i.e. $\dfrac{\theta}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $\dfrac{\theta}{2} = \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$, i.e. $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}[4\pi]$, ou $\theta = \pm\dfrac{4\pi}{3}[4\pi]$, donc

$$z \in \left\{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}, \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-\frac{4i\pi}{3}}\right\} = \{j, j^2\}.$$

Synthèse. Si $z = j$ ou $z = j^2$, alors $|z| = \dfrac{1}{|z|} = 1$. $1+z = \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ donc $|1+z| = |z|$. D'où le résultat.

Exercice 15. *Autour des entiers de Gauss*. ●●○ On définit l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ comme suit :

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. On se propose de déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ par analyse-synthèse, c'est-à-dire les éléments z de $\mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $zz' = 1$.
   (a) Soit z inversible dans $\mathbb{Z}[i]$. Déterminer la valeur du module de z.

Correction

Soit z un élément inversible de $\mathbb{Z}[i]$. Soit donc z' dans $\mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$. En multipliant l'égalité par $\overline{zz'}$, on obtient

$$|z|^2|z'|^2 = 1.$$

Il existe $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Donc $|z|^2$ et $|z'|^2$ sont des entiers naturels de produit égal à 1. Donc, nécessairement, $|z|^2 = 1$, donc $|z| = 1$ car $|z|$ est positif.

   (b) Quels sont les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ de module 1 ?

Correction

Soit $z = a + ib$, avec a et b entiers naturels, tel que $|z| = 1$. Donc $|z|^2 = 1$, c'est-à-dire que $a^2 + b^2 = 1$. On a la somme de deux entiers naturels égale à 1, donc l'un des deux est égal à 1 et l'autre est nul. Donc $a^2 = 1$ et $b^2 = 0$ ou bien $a^2 = 0$ et $b^2 = 1$. Donc les quatre couples possibles sont $(a, b) = (1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ ou $(0, -1)$, ce qui correspond aux quatre nombres 1, -1, i et $-i$.

   (c) Conclure.

Correction

Conclusion : l'analyse des questions précédentes a montré que nécessairement, un élément inversible de $\mathbb{Z}[i]$ était dans $\{1, -1, i, -i\}$.

Synthèse. 1 est inversible d'inverse 1, -1 est inversible d'inverse -1, i est inversible d'inverse $-i$ et $-i$ est inversible d'inverse i.
Donc l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ est $\{1, -1, i, -i\}$.

2. On va, dans cette deuxième partie, utiliser $\mathbb{Z}[i]$ pour démontrer le résultat suivant : tout produit de nombres entiers s'écrivant comme somme de deux carrés s'écrit comme une somme de deux carrés.

(a) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ est dans $\mathbb{Z}[i]$.

Correction

Soient $z = \alpha + i\beta$ et $z' = \gamma + i\delta$ deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre entiers). Alors

$$zz' = (\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

$\alpha\gamma - \beta\delta \in \mathbb{N}$ et $\alpha\delta - \beta\gamma \in \mathbb{N}$, donc $zz' \in \mathbb{Z}[i]$.

(b) Soient $m = a^2 + b^2$ et $n = c^2 + d^2$ deux entiers sommes de deux carrés (a, b, c, d sont aussi entiers). Exprimer m et n à l'aide des nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$, et en déduire que mn s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers (et expliciter ces entiers en fonction de a, b, c et d).

Correction

On remarque que $|z_1|^2 = a^2 + b^2$ et que $|z_2| = c^2 + d^2$. Donc $m = |z_1|^2$ et $n = |z_2|^2$. On a donc $mn = |z_1|^2|z_2|^2 = |z_1z_2|^2$. Or

$$z_1z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Donc

$$mn = (ac - bd)^2 + (ac + bd)^2.$$

Comme $ac - bd$ et $ac + bd$ sont entiers, on a bien écrit mn comme somme de deux carrés.

(c) Application. Écrire 13, 25, puis 325 comme somme de deux carrés.

Correction

On a de manière évidente $13 = 3^2 + 2^2$ et $25 = 3^2 + 4^2$. Donc

$$325 = 13 \times 25 = (3 \times 3 - 2 \times 4)^2 + (3 \times 4 + 2 \times 3)^2 = 1^2 + 18^2$$

3. Terminons par des questions géométriques.

(a) Soit $ABCD$ un carré, ses sommets ayant pour affixes respectives a, b, c, d. Montrer que si c et d sont dans $\mathbb{Z}[i]$, alors a et b aussi.

Correction

Pour que $ABCD$ soit un carré, il faut et il suffit que A soit l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et que B soit l'image de D par la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. En termes d'affixes, cela signifie que

$$a-d=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-d) \text{ et } b-c=e^{-i\frac{\pi}{2}}(d-c),$$

c'est-à-dire

$$a-d=i(c-d) \text{ et } b-c=-i(d-c).$$

Donc $a=d+i(c-d)$ et $b=c-i(d-c)$ sont dans $\mathbb{Z}[i]$ car la somme et le produit de deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ reste dans $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Soit ABC un triangle équilatéral. Montrer que, si a, b et c sont les affixes respectives de A, B et C, alors on ne peut pas avoir $(a,b,c)\in\mathbb{Z}[i]^3$.

Correction

Supposons que a et b sont dans $\mathbb{Z}[i]$. De plus, supposons que ABC est un vrai triangle, c'est-à-dire $a\neq b$, $a\neq c$ et $b\neq c$. Comme ABC est un triangle équilatéral, on a

$$c-b=j(a-b) \text{ ou } c-b=j^2(a-b).$$

Commençons par le cas $c-b=j(a-b)$. Alors $c=b+j(a-b)$. Écrivons

$$a=m+in,\quad b=p+iq,\quad j=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

avec m, n, p et q des entiers. Comme $a\neq b$, on a $m\neq p$ ou $n\neq q$. Supposons par exemple que $n\neq q$ (le cas $m\neq p$ se traitera identiquement). Alors

$$\begin{aligned}
c&=p+iq+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(m-p+i(n-q))\\
&=p+iq+\frac{m-p}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(n-q)+i\frac{1}{2}(n-q)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(m-p)\\
&=\left(p+\frac{m-p}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(n-q)\right)+i\left(q+\frac{1}{2}(n-q)+\frac{\sqrt{3}}{2}(m-p)\right)
\end{aligned}$$

Montrons que $p+\frac{m-p}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(n-q)$ n'est pas entier. Supposons que ce nombre est entier. Il est donc égal à r, entier. r est en particulier rationnel. Donc

$$p+\frac{m-p}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(n-q)=r,$$

soit

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(n-q)=p-r+\frac{m-p}{2},$$

ou encore, comme $n\neq q$,

$$\sqrt{3}=\frac{2}{n-q}\left(p-r+\frac{m-p}{2}\right).$$

Donc $\sqrt{3}$ serait rationnel, ce qui est impossible, d'où le résultat.
PREUVE : si $\sqrt{3}$ était rationnel, on aurait $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Donc on aurait $3q^2 = p^2$. Donc 3 diviserait p^2, donc 3 diviserait p. Donc 9 diviserait $3q^2$, donc 3 diviserait q. Donc 3 serait un diviseur commun à p et à q, impossible.

On procède de même pour le cas $c - b = j^2(a - b)$.

3 Résolution d'équations – polynômes – racines de l'unité

Exercice 16. ●○○ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - z + i + 1 = 0$

Correction

Il s'agit d'une équation du second degré, donc le discriminant Δ est $\Delta = 1 - 4(1 + i) = -3 - 4i \neq 0$. On a donc deux solutions. Déterminons des racines de Δ. Si $\omega = x + iy$ est une racine de Δ, alors $x^2 - y^2 = -3$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, donc $2x^2 = 2$ et $2y^2 = 8$, donc $x = \pm 1$ et $y = \pm 2$. Comme $2xy = -4 < 0$, les racines de Δ sont $\pm(1 - 2i)$. Donc les solutions de l'équation sont

$$\frac{1 \pm (1 - 2i)}{2}.$$

2. $z^6 - 2z^3 \cos(\varphi) + 1 = 0$

Correction

Analyse. Soit z une solution de l'équation, $Z = z^3$. Alors $Z^2 - 2Z\cos(\varphi) + 1 = 0$. Calculons le discriminant Δ de cette équation : $\Delta = 4\cos^2(\varphi) - 4 = 4(\cos^2(\varphi) - 1) = -4\sin^2(\varphi) \leqslant 0$. D'où deux racines, $\pm 2i|\sin(\varphi)| = \pm 2i\sin(\varphi)$. On peut en effet enlever les valeurs absolues puisqu'on prend $\pm$. D'où

$$Z = \frac{2\cos(\varphi) \pm 2i\sin(\varphi)}{2} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi) = e^{\pm i\varphi}.$$

Donc z est une racine cubique de $e^{\pm i\varphi}$, donc $z \in \{e^{\pm i\frac{\varphi}{3}}, je^{\pm i\frac{\varphi}{3}}, j^2e^{\pm i\frac{\varphi}{3}}\}$.
Synthèse. Réciproquement, on peut vérifier que de tels complexes sont bien solution.

Exercice 17. ●◐○ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $1 + z + z^2 = 0$

Correction

On remarque que j et j^2 sont solution de cette équation, et, comme une équation de degré 2 n'a que deux solutions au plus, ce sont les deux seules.

2. $(z+i)^3 + iz^3 = 0$

Correction

Soit z une solution. Alors $(z+i)^3 + iz^3 = 0$ si et seulement si $\left(\frac{z+i}{z}\right)^3 = -i$ (z ne peut pas être nul car $i^3 \neq 0$). Donc $\frac{z+i}{z}$ est une racine cubique de $-i$, i.e. (faites les calculs)

$$\frac{z+i}{z} \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{\pi}{2}+\frac{2i\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{2}-\frac{2i\pi}{3}} \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{\frac{-5i\pi}{6}} \right\}$$

Donc, si $\frac{z+i}{z} = \omega$, alors $z + i = \omega z$, i.e. $z(\omega - 1) = i$, i.e. $z = \frac{i}{\omega - 1}$, i.e. $z \in \left\{ \frac{i}{e^{i\frac{\pi}{2}} - 1}, \frac{i}{e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1}, \frac{i}{e^{-\frac{5i\pi}{6}} - 1} \right\}$.
Réciproquement, un tel z est solution.

3. $z^2 = -\overline{z}^2$

Correction

Analyse. Soit z une solution. Alors $z^2 = -\overline{z}^2$. Posons $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Alors $x^2 - y^2 + 2ixy = -(x^2 - y^2) + 2ixy$, donc $x^2 - y^2 = 0$, donc $x = \pm y$, donc z est sur la droite d'équation $y = x$ ou $y = -x$.
Synthèse. Soit $z = x + iy$ avec $x = y$. Alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 2ixy$, $-\overline{z}^2 = -(x^2 - y^2 - 2ixy) = 2ixy$. Donc un tel z est solution.

Exercice 18. ●●○ Soit n un entier naturel non nul. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Correction

C'est un exercice assez important (on le refera dans le chapitre « polynômes », dans la partie « exercices corrigés en classe »).
Analyse. Soit z une racine de l'équation. Alors $z \neq 1$ car clairement, $1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^n = n + 1 \neq 0$. Donc, par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = 0,$$

donc $z^{n+1} - 1 = 0$, donc $z^{n+1} = 1$, donc $z \in \mathbb{U}_{n+1}$. Donc $\boxed{z \in \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}}$.
Synthèse. Soit $z \in \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}$. Alors $z^{n+1} = 1$, donc $z^{n+1} - 1 = 0$, donc, comme $z \neq 1$, $\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = 0$, donc $1 + z + \cdots + z^{n+1} = 0$, donc z est solution de l'équation !

Exercice 19. ●●○ Soit n un entier naturel non nul. Calculer $V_n = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Correction

On utilise la technique de l'angle moitié !

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1| \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} |e^{\frac{2ip\pi}{n}} - 1| \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} |e^{\frac{ip\pi}{n}} (e^{\frac{-ip\pi}{n}} - e^{\frac{ip\pi}{n}})| \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} |2i \sin\left(\frac{p\pi}{n}\right)|. \end{aligned}$$

Or, si $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $\frac{p\pi}{n} \in [0, \pi]$, donc $\sin\left(\frac{p\pi}{n}\right) \geqslant 0$. Donc

$$V_n = 2\sum_{p=0}^{n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{n}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{(n-1)}{2n}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) \times 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Exercice 20. *Sur un produit de sinus*. ●●○ Soit n un entier naturel non nul. On veut calculer le produit suivant, noté S_n, et défini par

$$S_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

On pose R_n et T_n les deux produits suivants

$$R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \text{ et } T_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

1. Démontrer que $S_n = T_n$ à l'aide d'un changement d'indices et en déduire que $S_n = \sqrt{R_n}$.

Correction

$S_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Effectuons le changement d'indice $\ell = 2n - k$. Quand $k = 1$, $\ell = 2n-1$. Quand $k = n-1$, $\ell = n+1$. Donc

$$S_n = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-\ell)\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(-\frac{\ell\pi}{2n} + \pi\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right) = T_n.$$

On en déduit que

$$R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = S_n \times 1 \times T_n = S_n^2,$$

donc $S_n^2 = R_n$. Or, pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n} \in [0, \pi]$, donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right) \geqslant 0$, donc $S_n \geqslant 0$. Donc $S_n = \sqrt{R_n}$.

2. (Un calcul de R_n)

(a) Déterminer toutes les solutions de l'équation $(z+1)^{2n} - 1 = 0$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$. On notera $z_1, \ldots, z_{2n-1}$ les $2n$ solutions non nulles trouvées.

Correction

Soit z une solution de $(z+1)^{2n}-1 = 0$. Alors $(z+1)^{2n} = 1$, donc $z+1$ est une racine n-ième de l'unité, donc on dispose de k dans $[\![0, 2n-1]\!]$ tel que $z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}$. Donc $z = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1$. Réciproquement, tout complexe de la forme $z = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1$, avec k dans $[\![0, 2n-1]\!]$ est solution. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1,\ k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\}.$$

(b) Écrire pour tout k le complexe z_k sous forme exponentielle.

Correction

Soit k dans $[\![1, 2n-1]\!]$. Par la technique de l'angle moitié, on écrit que

$$\begin{aligned} e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1 &= e^{\frac{ik\pi}{2n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) \\ &= e^{\frac{ik\pi}{2n}} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{2n} + i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

On note $U_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.

(c) Démontrer que $U_n = -2^{2n-1} R_n$.

Correction

On calcule :

$$\begin{aligned}
U_n &= \prod_{k=1}^{2n-1}\left(2\sin\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{2n}+i\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= 2^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\sin\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{2n}+i\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= 2^{2n-1}\left(\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{2n-1}\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{2n}+i\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= 2^{2n-1}R_n\times\mathrm{e}^{\frac{i\sum_{k=1}^{2n-1}k\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2n-1}\\
&= 2^{2n-1}R_n\mathrm{e}^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}}\mathrm{e}^{in\pi-\frac{i\pi}{2}} = 2^{2n-1}R_n\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{2}-\frac{i\pi}{2}}\mathrm{e}^{in\pi-\frac{i\pi}{2}} = -2^{2n-1}R_n.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(d) Montrer que $U_n = -2n$.

Correction

(Question dure) Soit $P(z)$ le polynôme $(z+1)^{2n}-1$. Alors, par la question 2.(b), on remarque que $P(z) = z\times(z-z_1)\times\cdots\times(z-z_{2n-1})$. Le coefficient du monôme en z dans $(z+1)^{2n}-1$ est facile à trouver. En effet,

$$(z+1)^{2n}-1 = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}z^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}z^k,$$

donc le coefficient de z est $\binom{2n}{1} = 2n$.

De même, le coefficient du monôme en z dans $z\times(z-z_1)\times\cdots\times(z-z_{2n-1})$ est donné par le coefficient constant de $\times(z-z_1)\times\cdots\times(z-z_{2n-1})$, donc $(-z_1)\times(-z_2)\times\cdots\times(-z_{2n-1}) = (-1)^{2n-1}z_1\ldots z_{2n-1} = -z_1\ldots z_{2n-1}$. D'où $z_1\ldots z_{2n-1} = -2n$.

(e) En déduire $S_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Correction

On en déduit que $S_n = \sqrt{R_n} = \sqrt{\dfrac{-2n}{2^{2n-1}}} = \sqrt{\dfrac{n}{2^{2n-2}}} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$. D'où le résultat demandé.

Exercice 21. *Générateurs de $\mathbb{U}_n$.* ●●◐ Soit n un entier naturel non nul. On dit que $\omega\in\mathbb{U}_n$ est une racine primitive n-ième de l'unité si $\mathbb{U}_n = \{\omega,\omega^2,\ldots,\omega^n\}$.

1. Déterminer les racines primitives quatrièmes de l'unité.

Correction

Les quatre racines quatrièmes de l'unité sont $1, -1, i, -i$. On remarque que $1 = 1^2 = 1^3 = 1^4$ donc 1 n'est pas une racine primitive de l'unité. De même, $(-1)^3 = (-1)^1$ donc -1 n'est pas une racine primitive de l'unité. En revance, $(i, i^2, i^3, i^4) = (i, -1, -i, 1)$ et $(-i, (-i)^2, (-i)^3, (-i)^4) = (-i, -1, i, 1)$ donc i et $-i$ sont des racines primitives quatrièmes de l'unité.

2. Déterminer une condition générale pour qu'une racine de l'unité soit primitive.

Correction

Soit n un entier naturel. Soit ω une racine n-ième de l'unité, soit k tel que $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Montrons que ω est une racine n-ième primitive de l'unité si et seulement si $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$.

Si pgcd$(k, n) = 1$**.** Soit ω' une autre racine de l'unité, p tel que $\omega' = e^{\frac{2ip\pi}{n}}$. Trouvons m tel que $\omega^m = \omega'$. Comme $\mathrm{pgcd}(k, n) = 1$, il existe, par le théorème de Bezout, a et b entiers relatifs tels que $ak + bn = 1$. Alors $pak + pbn = p$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\omega^{pa} &= \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{pa}\\ &= e^{\frac{2i\pi pak}{n}}\\ &= e^{\frac{2i\pi(p-pbn)}{n}}\\ &= e^{\frac{2i\pi p}{n}} e^{\frac{2i\pi pbn}{n}}\\ &= e^{\frac{2i\pi p}{n}}\\ &= \omega'.\end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré.

Si ω est une racine primitive de l'unité. Il existe alors p entier tel que

$$\omega^p = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

donc

$$e^{\frac{2ipk\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Donc $\dfrac{2pk\pi}{n} = \dfrac{2\pi}{n}[2\pi]$, donc il existe m entier relatif tel que $2pk\pi - 2\pi = 2mn\pi$, c'est-à-dire qu'il existe m entier relatif tel que

$$pk - mn = 1.$$

C'est une relation de Bezout, donc k et n sont premiers entre eux.

4 Applications à la géométrie

Exercice 22. ●○○ Trouver dans l'ensemble des points z de $\mathbb{C}$ vérifiant chacune de ces propriétés :

1. Les points d'affixes i, z et iz forment un triangle rectangle isocèle en i.

Correction

Pour que les points d'affixes z, i et iz forment un triangle rectangle isocèle en i, en le supposant non dégénéré (donc $z \neq i$), il faut que iz soit l'image de z par la rotation de centre i et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, soit

$$\frac{iz-i}{z-i} = \pm i.$$

Si $\frac{iz-i}{z-i} = i$, on obtient $z-1 = z-i$, donc $-1 = -i$, c'est impossible. Si $\frac{iz-i}{z-i} = -i$, on obtient

$$z - 1 = i - z,$$

soit $z = \frac{1+i}{2}$.

2. Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en z.

Correction

Soit z un complexe, tel que z, z^2 et z^3 forme un triangle rectangle en z. Cela signifie qu'un argument de

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z}$$

est $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire qu'un argument de $z+1$ est $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, i.e. qu'il existe $R > 0$ tel que

$$z + 1 = Re^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm Ri,$$

donc $z = -1 \pm Ri$. Cela signifie que z appartient à la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $x = -1$. La réciproque est claire.

3. Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en z^2.

Correction

Soit z un complexe, tel que z, z^2 et z^3 forme un triangle rectangle en z^2. Cela signifie qu'il existe un réel R tel que

$$\frac{z^3 - z^2}{z - z^2} = Ri,$$

c'est-à-dire $z = Ri$. Cela signifie que z appartient à la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $x = 0$. La réciproque est claire.

4. ●●◐ Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en z^3.

Correction

Soit z un complexe, tel que z, z^2 et z^3 forme un triangle rectangle en z^2. Cela signifie qu'il existe un réel R tel que

$$\frac{z - z^3}{z^2 - z^3} = iR.$$

Or,

$$\frac{z-z^3}{z^2-z^3} = \frac{z(1+z)(1-z)}{z^2(1-z)} = \frac{1+z}{z}.$$

Donc la condition se traduit par

$$1+z = iRz.$$

Donc

$$z = \frac{-1}{1-iR} = \frac{1+iR}{1+R^2}.$$

Là, on ne voit pas trop ce que l'on peut dire... Disons plutôt que la condition revient à dire que $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur, c'est-à-dire que

$$\overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)} = -\frac{1+z}{z},$$

i.e.

$$z+|z|^2 = -\overline{z}-|z|^2,$$

i.e.

$$|z|^2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z} = 0,$$

ou encore

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}.$$

Donc l'ensemble des points vérifiant la condition ci-dessus est le cercle $\mathcal{C}$ de centre d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

5. ●●◐ Les points d'affixes j, z et jz sont alignés.

Correction

Procédons de même que précédemment. L'alignement des points d'affixes j, z et jz se traduit par, si $z \neq 1$,

$$\frac{jz-z}{jz-j} \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$\frac{z(j-1)}{j(z-1)} = \overline{\left(\frac{z(j-1)}{j(z-1)}\right)},$$

i.e.

$$\frac{z(j-1)}{j(z-1)} = \frac{\overline{z}(\overline{j}-1)}{\overline{j}(\overline{z}-1)},$$

soit, en utilisant $\overline{j} = j^2$,

$$z(j-1)(j^2(\overline{z}-1)) = \overline{z}(j^2-1)(j(z-1)).$$

i.e.

$$(1-j^2)(|z|^2-z) = (1-j)(|z|^2-\overline{z}),$$

soit, en divisant par $(1-j)$,

$$(1+j)(|z|^2-z)=|z|^2-\overline{z},$$

ou encore

$$(1+j)(|z|^2-z)-|z|^2+\overline{z}=0.$$

Or,

$$\begin{aligned}(1+j)(|z|^2-z)-|z|^2+\overline{z}&=j|z|^2-(1+j)z+\overline{z}\\&=j\left(|z|^2-\frac{1+j}{j}z+\frac{1}{j}\overline{z}\right).\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{1+j}{j}=\dfrac{-j^2}{j}=-j$ et $\dfrac{1}{j}=j^2$, donc

$$(1+j)(|z|^2-z)-|z|^2+\overline{z}=j\left(|z|^2+jz+j^2\overline{z}\right)$$

La condition se réécrit donc

$$j|z|^2+jz+j^2\overline{z}=0,$$

ou encore

$$|z+j^2|^2=1.$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre $-j^2$ et de rayon 1.
Réciproquement, si z est sur le cercle de centre $-j^2$ et de rayon 1, il existe un θ réel tel que $z=-j^2+e^{i\theta}$. On a alors

$$\frac{z(j-1)}{j(z-1)}=\frac{(-j^2+e^{i\theta})(j-1)}{j(-j^2-1+e^{i\theta})}.$$

Écrivons $-j^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $j-1=e^{\frac{2i\pi}{3}}-1=i\sin(2\pi/3)e^{i\frac{\pi}{3}}$, $-j^2-1=j$. Le quotient se réécrit donc

$$\begin{aligned}\frac{z(j-1)}{j(z-1)}&=\frac{(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta})2i\sin(2\pi/3)e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}(e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{i\theta})}\\&=2\sin(2\pi/3)i\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(1+e^{i(\theta-\frac{\pi}{3})})}{1+e^{i(\theta-\frac{2\pi}{3})}}\\&=2\sin(2\pi/3)i\frac{e^{i\frac{3\theta-\pi}{6}}2\cos\left(\frac{3\theta-\pi}{6}\right)}{e^{i\frac{3\theta-2\pi}{6}}2\cos\left(\frac{3\theta-2\pi}{6}\right)}\\&=\frac{2\sin(2\pi/3)}{\cos\left(\frac{3\theta-\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{3\theta-2\pi}{6}\right)}ie^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}\\&=\frac{2\sin(2\pi/3)}{\cos\left(\frac{3\theta-\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{3\theta-2\pi}{6}\right)}\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc les points z, j et jz sont alignés.

6. ●●◐ O est l'orthocentre (l'intersection des hauteurs) du triangle formé par les points d'affixe z, z^2 et z^3.

Correction

Soit z un complexe tel que z, z^2 et z^3 soient deux à deux distincts. Pour que O soit l'orthocentre du triangle formé par z, z^2 et z^3, il faut, si on appelle M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes z, z^2 et z^3, que (OM_1) soit perpendiculaire à (M_2M_3) et que (OM_2) soit perpendiculaire à (M_1M_3). Cela s'écrit, en termes de produits scalaires, comme

$$\begin{cases} z.(\overline{z}^3-\overline{z}^2)+\overline{z}(z^3-z^2)=0 \\ z^2(\overline{z}^3-\overline{z})+\overline{z}^2(z^3-z)=0. \end{cases}$$

soit

$$\{\overline{z}^2-\overline{z}+z^2-z=0z|z|^2(\overline{z}^2-1)+\overline{z}|z|^2(z^2-1)=0,$$

c'est-à-dire

$$\{\overline{z}^2-\overline{z}+z^2-z=0|z|^2(\overline{z}+z)-(z+\overline{z})=0.$$

La seconde équation devient

$$(|z|^2-1)(z+\overline{z})=0.$$

Si $|z|^2=1$**, i.e.** $z\in\mathbb{U}$**.** On écrit $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0,2\pi[$, et la première équation devient

$$\cos(2\theta)=\cos(\theta),$$

soit $2\cos^2(\theta)-1=\cos(\theta)$, ou encore $2(\cos(\theta)-1)(\cos(\theta)+\frac{1}{2})$, soit $\theta=0$, $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ou $\theta=\frac{4\pi}{3}$. Le cas $\theta=0$ est exclu puisque z, z^2 et z^3 sont distincts. Restent donc comme solutions

$$z=j \text{ ou } z=j^2.$$

Si $z+\overline{z}=0$**, i.e.** z **est imaginaire pur,** écrivons $z=iy$ avec $y\in\mathbb{R}$. La première condition devient

$$-R^2=0,$$

donc $R=0$, ce qui est exclu car z, z^2 et z^3 doivent être distincts.
Finalement, les seuls points qui conviennent sont $z=j$ et $z=j^2$.

Exercice 23. *Sur les transformations géométriques.* ●◐○

1. Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $i-2$ et d'angle $\pi/3$.

Correction

Soit z l'affixe d'un point M du plan. L'affixe z' de l'image M' de M par la rotation de centre $i-2$ et d'angle $\pi/3$ est

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\frac{\pi}{3}}(z-(i-2))+i-2 \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z-(i-2))+i-2 \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+(2-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)i. \end{aligned}$$

2. Soit r la rotation de centre i et d'angle $\pi/4$, et r' la rotation de centre 1 et d'angle $\pi/4$. Déterminer $r'\circ r$.

Correction

Soit z l'affixe d'un point M du plan. L'affixe z' de l'image M' de M par la rotation de centre i et d'angle $\pi/4$ est

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\frac{\pi}{4}}(z-i)+i \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(z-i)+i \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}z-\frac{i-1}{\sqrt{2}}+i \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}z+\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

L'affixe z'' de l'image M'' de M' par la rotation de centre 1 et d'angle $\pi/4$ est

$$\begin{aligned} z'' &= e^{i\frac{\pi}{4}}(z'-1)+1 \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}z'-\frac{1+i}{\sqrt{2}}+1 \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}z'+\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}z+\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}z+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}} \\ &= iz+\frac{(1+i)(1+(\sqrt{2}-1)i)}{2}+\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}} \\ &= iz+\frac{1+(\sqrt{2}-1)i+i+(1-\sqrt{2})}{2}+\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}} \\ &= iz+\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}+\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} \\ &= iz+2-\sqrt{2} \end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Cherchons le point fixe de cette transformation : on cherche un complexe ω tel que

$$\omega = i\omega + 2 - \sqrt{2},$$

i.e.

$$\omega(1-i) = 2 - \sqrt{2},$$

soit

$$\omega = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) i.$$

Donc

$$z'' - \omega = i(z-\omega) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega).$$

Donc la composée cherchée est la rotation de centre ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 24. ●●○ Soit ABC un triangle, M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de $[AB]$. On note a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. Montrer que

$$[(BM) \text{ orthogonale à } (CR)] \Leftrightarrow [b^2 + c^2 = 5a^2].$$

Correction

Essayons de résoudre ce problème à l'aide des nombres complexes. Soient z_A, z_B, z_C les affixes respectives de A, B et C. L'affixe de M est $z_M = \dfrac{z_A+z_C}{2}$, celle de N est $z_N = \dfrac{z_A+z_B}{2}$. On sait que (BM) est orthogonale à (CN) si, et seulement si $\vec{BM}.\vec{CN}=0$. On calcule les affixes u et v de ces deux vecteurs :

$$u = z_N - z_C = \frac{z_A+z_B-2z_C}{2},\ \ v = \frac{z_A+z_C-2z_B}{2}.$$

Calculons alors

$$\begin{aligned}
8\vec{BM}.\vec{CN} &= 4u\overline{v} + 4\overline{u}v\\
&= (z_A+z_B-2z_C)(\overline{z_A}+\overline{z_C}-2\overline{z_B}) + (\overline{z_A}+\overline{z_B}-2\overline{z_C})(z_A+z_C-2z_B)\\
&= |\alpha|^2+\alpha\overline{\gamma}-2\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}-2|\beta|^2-2\gamma\overline{\alpha}-2|\gamma|^2-4\gamma\overline{\beta}\\
&+|\alpha|^2+\overline{\alpha}\gamma-2\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\alpha+\overline{\beta}\gamma-2|\beta|^2-2\overline{\gamma}\alpha-2|\gamma|^2+4\overline{\gamma}\beta.\\
&= 2|\alpha|^2+\alpha\overline{\gamma}+\overline{\alpha}\gamma-(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)+5(\gamma\overline{\beta}+\overline{\gamma}\beta)-4|\beta|^2-4|\gamma|^2.
\end{aligned}$$

De même, la condition $b^2+c^2=5a^2$ s'écrit $b^2-c^2-5a^2=0$. Or,

$$b^2=(\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma}),\ \ c^2=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta}),\ \ b^2=(\beta-\gamma)(\overline{\beta}-\overline{\gamma}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
b^2-c^2-5a^2 &= (\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})+(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-5\beta-\gamma)(\overline{\beta}-\overline{\gamma})\\
&= 2|\alpha|^2+\alpha\overline{\gamma}+\overline{\alpha}\gamma-(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)+5(\gamma\overline{\beta}+\overline{\gamma}\beta)-4|\beta|^2-4|\gamma|^2\\
&= 8\vec{BM}.\vec{CN}.
\end{aligned}$$

D'où l'équivalence demandée.

Exercice 25. ●●◐ Quels sont les z dans $\mathbb{C}^*$ tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme ?

Correction

On remarque que si A, B, C, D sont 4 points d'affixes respectives a, b, c, d, alors ces points forment un parallélogramme si, et seulement si $b-a=\pm(c-d)$ ou $c-a=\pm(d-b)$.
Procédons par analyse-synthèse.
Analyse. Soit z un tel complexe. Soit ω une racine cubique de z. Alors ω, $j\omega$, $j^2\omega$ et ω^3 forment un parallélogramme.

- Si $\omega^3-\omega=\pm(j^2\omega-j\omega)$, alors $\omega^2-1=\pm(j^2-j)=\pm i\sqrt{3}$, donc $\omega^2=1\pm i\sqrt{3}=2e^{i\pm\frac{\pi}{3}}$ donc $\omega=\pm\sqrt{2}e^{i\pm\frac{\pi}{6}}$, donc $z=\pm 2\sqrt{2}i$.
- Si $\omega^3-j\omega=\pm(j^2\omega-\omega)$, alors $\omega^2=j\pm(j^2-1)$, donc

$$\begin{aligned}
\omega^2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-1\right) &= 1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{i\pi}{3}},\\
\text{ou}\ \ \omega^2 &= -1++\sqrt{3}i = -2e^{\frac{-i\pi}{3}},
\end{aligned}$$

donc, même conclusion que précédemment, $\omega^3=\pm 2\sqrt{2}i$.

- On conclut de même dans le troisième cas.

Donc les seules solutions sont $\pm 2\sqrt{2}i$.
Synthèse. Si $z = \pm 2\sqrt{2}i$, on a alors comme racines cubiques $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}j$ et $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}j^2$, qui vérifient la relation souhaitée.

Exercice 26. *Un invariant des polygones réguliers*. ●●◐ Soit un polygone régulier à n sommets $S_1, \dots, S_n$, inscrit dans un cercle de rayon R. Soit M un point de ce cercle. Montrer que la quantité $S_1M^2 + S_2M^2 + \dots + S_nM^2$ est une grandeur indépendante de M.

Correction

Quitte à changer de repère, on peut supposer que le polygone est centré en l'origine, et qu'un de ses points, disons z_n, est situé en $(R, 0)$. L'affixe z_k de S_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$ est donc

$$z_k = Re^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Puisque M est un point du cercle, il existe un réel θ tel que l'affixe de M est $Re^{i\theta}$. Calculons alors la quantité

$$\sum_{k=1}^{n} S_kM^2.$$

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
S_kM^2 &= (Re^{i\theta} - Re^{\frac{2ik\pi}{n}})\overline{(Re^{i\theta} - Re^{\frac{2ik\pi}{n}})} \\
&= R^2(e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}})(e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}) \\
&= R^2(1 - e^{i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)} + 1) \\
&= R^2\left(2 - e^{i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} S_kM^2 &= \sum_{k=1}^{n} R^2\left(2 - e^{i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}\right) \\
&= R^2\sum_{k=1}^{n}\left(2 - e^{i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}\right) \\
&= 2nR^2 - R^2\sum_{k=1}^{n} e^{i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)} - R^2\sum_{k=1}^{n} e^{-i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)} &= e^{-i\theta}\sum_{k=1}^{n} e^{-i\frac{2k\pi}{n}} \\
&= e^{-i\theta}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right)^k \\
&= e^{-i\theta}\sum_{k=1}^{n}\frac{1 - \left(e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{-i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De même, $\sum_{k=1}^{n} e^{-i\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)} = 0$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n} S_k M^2 = 2nR^n,$$

grandeur indépendante de θ, donc de M.

Exercice 27. ●●◐ Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$?

Correction

Raisonnons par analyse-synthèse. Nommons φ l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

Analyse. Soit $e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi[$) un élément du cercle unité. Par définition de φ, θ ne doit pas être nul. Calculons $\varphi(e^{i\theta})$:

$$\begin{aligned}
\varphi(e^{i\theta}) &= \frac{1}{1-e^{i\theta}} \\
&= \frac{1}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin(\theta/2)} \\
&= \frac{i}{2}\,\frac{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\
&= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{\tan(\theta/2)} - i\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\tan(\theta/2)}.
\end{aligned}$$

Donc $\varphi(e^{i\theta})$ appartient à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

Synthèse. Soit z l'affixe d'un point quelconque de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. Écrivons $z = \dfrac{1}{2} + iy$, où y est un réel. Cherchons un réel θ de $]0, 2\pi[$ tel que $\varphi(e^{i\theta}) = z$. L'équation se réécrit

$$\frac{1}{2} + \frac{i}{2\tan(\theta/2)} = \frac{1}{2} + iy,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\tan(\theta/2)} = y,$$

Si $y = 0$, l'équation n'a pas de solution. Sinon, elle devient

$$\tan(\theta/2) = \frac{1}{2y}.$$

Donc

$$\frac{\theta}{2} = \text{Arctan}(1/2y)[\pi],$$

donc

$$\theta = 2\text{Arctan}(1/2y)[2\pi],$$

on prend donc pour θ un élément de $]0, 2\pi[$ tel que $\theta = 2\text{Arctan}(1/2y)[2\pi]$.
Conclusion. L'image de $\mathbb{U}\backslash\{1\}$ par φ est donc la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ privée du point d'ordonnée 0.

Exercice 28. *Étude d'une inversion.* ●●◐ Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est identifié au plan complexe et rapporté à un repère orthonormal. Pour tout réel non nul k, on appelle inversion de pôle O et de puissance k la transformation F de $\mathbb{R}^2\backslash\{O\}$ associée à l'application $f : z \mapsto \dfrac{k}{\overline{z}}$.

1. Soit $M \in \mathbb{R}^2\backslash\{O\}$. Montrer que O, M et $M' = F(M)$ sont alignés, et que M et M' sont sur la même demi-droite issue de O si et seulement si $k > 0$.

Correction

Soient z et z' les affixes respectives de M et M'. Montrons que leurs arguments sont égaux modulo π. Soit $\theta = \arg(z)$. Alors

$$\begin{aligned}
\arg(z') &= \arg\left(\frac{k}{\overline{z}}\right) \\
&= \arg(k) + \arg\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)[2\pi] \\
&= \arg(k) - \arg(\overline{z})[2\pi] \\
&= \arg(k) + \arg(z)[2\pi] \\
&= \begin{cases} \arg(z)[2\pi] \text{ si } k > 0 \\ \pi + \arg(z)[2\pi] \text{ si } k < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, $\arg(z') \equiv \arg(z)[\pi]$. Donc O, M et M' sont alignés, et du M et M' sont du même côté de O si et seulement si $k \geqslant 0$.

2. Montrer que $OM.OM' = |k|$.

Correction

$OM = |z|$ et $OM' = |z'|$. Or,

$$\begin{aligned}|z||z'| &= |z|\left|\frac{k}{\overline{z}}\right| \\ &= |z|\frac{|k|}{|\overline{z}|} \\ &= |z|\frac{|k|}{|z|} = |k|.\end{aligned}$$

3. Montrer que l'équation complexe d'un cercle est de la forme $z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \delta = 0$, où $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Montrer que réciproquement, une telle équation est celle d'un cercle.

Correction

Soit un cercle de centre $A(a)$ et de rayon R. Un nombre complexe d'affixe z appartient à ce cercle si, et seulement si $|z-a|^2 = R^2$, i.e.

$$(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = R^2,$$

i.e.

$$z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2 - R^2 = 0.$$

On a l'équation voulue avec $\omega = a$ et $\delta = |a|^2 - R^2$.
Réciproquement, supposons qu'un complexe z satisfait une équation de la forme

$$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \delta = 0,$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Écrivons alors que

$$|z-\omega|^2 = (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) = z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \omega\overline{\omega}.$$

Donc l'équation que vérifie z se réécrit

$$|z-\omega|^2 - |\omega|^2 + \delta = 0,$$

soit

$$|z-\omega|^2 = |\omega|^2 - \delta.$$

Si $|\omega|^2 - \delta < 0$, aucun complexe z ne vérifie l'équation. L'ensemble décrit est l'ensemble vide.
Si $|\omega|^2 - \delta \geqslant 0$, l'équation devient

$$|z-\omega| = \sqrt{|\omega|^2 - \delta},$$

donc $M(z)$ appartient au cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $\sqrt{|\omega|^2 - \delta}$.

4. Soit (Δ) la droite d'équation complexe $\overline{a}z + a\overline{z} + b = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image de (Δ) par F. On pourra commencer par considérer le cas $b = 0$.

Correction

Commençons par le cas $b = 0$. L'équation de la droite s'écrit alors $\overline{a}z = a\overline{z}$, i.e.

$$\overline{z} = \frac{\overline{a}}{a}z.$$

Donc, si $z \in \Delta$,

$$z' = \frac{k}{\overline{z}} = \frac{a}{\overline{a}}\frac{k}{z} = \frac{a}{\overline{a}}\overline{z'}.$$

Donc $\overline{a}z' + a\overline{z'} = 0$, i.e. z' appartient à (Δ). Réciproquement, si $z' \in \Delta$, on a $z = \dfrac{k}{\overline{z'}} \in \Delta$.

Si $b \neq 0$, on part de

$$\overline{a}z + a\overline{z} + b = 0.$$

Les éléments de cette droite ne sont pas nuls, divisons donc par $z\overline{z}$, et multiplions pas k^2. On a alors

$$\overline{a}k\frac{k}{\overline{z}} + ak\frac{k}{z} + b\frac{k^2}{z\overline{z}} = 0,$$

soit, en remplaçant $\dfrac{k}{\overline{z}}$ par z',

$$\overline{a}kz' + ak\overline{z'} + bz'\overline{z'} = 0.$$

Soit

$$z'\overline{z'} + \frac{\overline{a}k}{b}z' + \frac{ak}{b}\overline{z'} = 0,$$

ou encore

$$\left(z' + \frac{ak}{b}\right)\overline{\left(z' + \frac{ak}{b}\right)} = \left|\frac{ak}{b}\right|^2.$$

c'est-à-dire au cercle de centre $-\dfrac{ak}{b}$ et de rayon $\left|\dfrac{ak}{b}\right|$. La réciproque est vraie, le raisonnement s'étant fait par équivalences.

5. Soient $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image par F du cercle (Γ) défini par l'équation $z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \delta = 0$.

Correction

On part de l'équation

$$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \delta = 0.$$

Pour tout z non nul, on divise par $z\overline{z}$, on multiplie par k^2 et on obtient

$$k^2 - k\omega\frac{k}{z} - k\overline{\omega}\frac{k}{\overline{z}} + \delta\frac{k^2}{z\overline{z}} = 0,$$

soit

$$\delta z'\overline{z'} - k\omega\overline{z'} - k\overline{\omega}z' + k^2 = 0.$$

Dans le cas où $\delta = 0$, on obtient la droite d'équation $-k\omega\overline{z'} - k\overline{\omega}z' + k^2 = 0$. Dans le cas $\delta \neq 0$, il s'agit du cercle d'équation

$$\delta z'\overline{z'} - k\omega\overline{z'} - k\overline{\omega}z' + k^2 = 0.$$

La réciproque est évidente (mais il faut dire qu'il y a a priori une réciproque à faire ! !)

Correction

Moralité : l'inversion transforme un cercle ou une droite en un cercle ou une droite !

Exercice 29. ●●○

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont n complexes non nuls, on a

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|,$$

avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$z_2 = \lambda_2 z_1, \ldots, z_n = \lambda_n z_1.$$

Correction

Montrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, où

$$(\mathcal{P}_n) : \forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n,\ |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|,$$

avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_n$.

Initialisation : $\mathcal{P}_2$ est vraie par l'inégalité triangulaire.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier n. Soient $z_1, \dots, z_{n+1}$ $n+1$ complexes. Posons $Z = z_1 + \dots + \dots z_n$. Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |Z + z_{n+1}| \leqslant |Z| + |z_{n+1}|, \tag{3}$$

avec égalité si et seulement si il existe un réel λ strictement positif tel que $z_{n+1} = \lambda Z$.
Par l'hypothèse de récurrence,

$$|Z| \leqslant |z_1| + \dots + |z_n|, \tag{4}$$

avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_n$.
Donc

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |Z| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

Il y a égalité si, et seulement si il y a égalité dans (3) et (4), c'est-à-dire qu'il existe n réels strictement positifs $\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\begin{aligned} & z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_n \\ & z_{n+1} = \lambda Z = \lambda(z_1 + \dots + z_n) = \lambda(z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n) = \lambda_{n+1} z_1, \end{aligned}$$

avec $\lambda_{n+1} = \lambda(1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : Héréditaire et vraie au rang 2, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Une application à la géométrie. On se place dans le plan complexe $\mathscr{P}$ d'origine O. Soit un entier $n \geqslant 3$. On considère n points $A_1, \dots, A_n$ d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$ tels que

(i) Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, A_k est distinct de O.
(ii) Les A_k sont deux à deux distincts.
(iii) Il n'existe aucune droite du plan $\mathscr{P}$ contenant tous les A_k.
(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

2. Donner un exemple de n-uplet $(z_1, \dots, z_n)$ vérifiant l'égalité précédente.

Correction

Posons pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Alors

(a) Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, A_k est distinct de O.

(b) Les A_k sont deux à deux distincts.

(c) Il n'existe aucune droite du plan $\mathscr{P}$ contenant tous les A_k car tous ces points sont sur le cercle unité, deux à deux distincts, et qu'il n'existe pas de droite passant par trois points distincts du cercle unité.

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$ car $n \neq 1$.

3. Pour tout k dans $[\![a, n]\!]$, on pose $u_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$. Soit M un point de $\mathscr{P}$ d'affixe z.

(a) Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k(z - z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Correction

Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k(z - z_k) &= \sum_{k=1}^{n} \overline{\frac{z_k}{|z_k|}}(z - z_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|}(z - z_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|}(z - z_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} z - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} z_k \\
&= z \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} - \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} |z_k| \text{ par la propriété 4.}
\end{aligned}$$

(b) En déduire l'inégalité (*) ci-dessous

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \qquad (*)$$

Correction

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right| &= \left|-\sum_{k=1}^{n}\overline{u}_k(z-z_k)\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}\overline{u}_k(z-z_k)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}|\overline{u}_k(z-z_k)| \text{ par l'inégalité triangulaire} \\ &= \sum_{k=1}^{n}|\overline{u}_k|\,|z-z_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n}|z-z_k| \text{ car } |\overline{u}_k| = \left|\frac{\overline{z}_k}{|z_k|}\right| = 1.\end{aligned}$$

(c) En utilisant l'inégalité triangulaire généralisée, démontrer que (*) est une égalité si eu seulement si, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $\overline{u}_k(z-z_k)$ est un réel négatif.

Correction

Il y a égalité dans l'inégalité précédente si toutes les inégalités sont des égalités, en particulier si et seulement si $\left|\sum_{k=1}^{n}\overline{u}_k(z-z_k)\right| = \sum_{k=1}^{n}|\overline{u}_k(z-z_k)|$, i.e. si et seulement si les $\overline{u}_k(z-z_k)$ sont tous positivement colinéaires, i.e., en supposant $z \neq z_1$, si et seulement s'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels strictement positifs tels que

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \overline{u}_k(z-z_k) = \lambda_k\overline{u}_1(z-z_1).$$

Si cela est le cas, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{u}_k(z-z_k) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{u}_1(z-z_1) = \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\overline{u}_1(z-z_1),$$

donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\overline{u}_1(z-z_1) = -\sum_{k=1}^{n}|z_k| \leqslant 0,$$

donc $\overline{u}_1(z-z_1)$ est un réel négatif, donc, par colinéarité positive, tous les $\overline{u}_k(z-z_k)$ sont des réels négatifs. La réciproque est vraie.

(d) En déduire que l'inégalité (*) est une égalité si et seulement si $z = 0$.

Correction

Si $z = 0$, l'inégalité est clairement une égalité.
Si l'inégalité est une égalité, alors pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, on dispose de $\lambda_k \leqslant 0$ tel que $\overline{u}_k(z - z_k) = \lambda_k$, donc $\dfrac{\overline{z}_k}{|z_k|}(z - z_k) = \lambda_k$, donc $\overline{z}_k(z - z_k) = \lambda_k|z_k|$, donc $\overline{z}_k z = \lambda_k|z_k| + |z_k|^2 \in \mathbb{R}$. Si z n'était pas nul, on aurait pour tout k, $z_k = \dfrac{\lambda_k|z_k| + |z_k|^2}{\overline{z}}$.
Donc pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, z_k est colinéaire à $\dfrac{1}{\overline{z}}$ donc tous les z_k sont colinéaires, donc $A_1, \dots, A_k$ sont tous sur une même droite, absurde ! Donc $z = 0$.

(e) Établir que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k$ atteint son minimum en un unique point M que l'on précisera.

Correction

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k$ correspond à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$. Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k - z| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, avec égalité ssi $z = 0$. Donc pour tout M, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} OA_k$ avec égalité ssi $M = O$.
Donc la quantité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k$ atteint bien un minimum en $M = O$.

Exercice 30. ●●● Soient trois réels (a, b, c) tels que $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Montrer qu'alors $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0$.

Correction

Je vais proposer une solution géométrique à ce problème. Une solution analytique est possible, en posant $e^{ib} = x + iy$ et $e^{ic} = x' + iy'$ mais elle est longue et fastidieuse.
Posons A, B et C les points d'affixes respectives e^{ia}, e^{ib} et e^{ic}. Alors, A, B et C sont sur un même cercle, de centre O et de rayon 1. Donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire que O est l'intersection des médiatrices de ABC. Mais l'égalité $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$ peut se réécrire $\dfrac{1}{3}(e^{ia} + e^{ib} + e^{ic}) = 0$, c'est-à-dire que le centre de gravité de ABC est O, donc que le point d'intersection des médianes est O. Le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité étant confondus, on en déduit que ABC est équilatéral.
On a donc $b = a + \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $c = a + \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$ ou bien $b = a + \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$ et $c = a + \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.
Donc $2b = 2a + \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$ et $2c = 2a + \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou bien $2b = 2a + \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $c = a + \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$, donc le triangle $A'B'C'$ où $A'(e^{2ia})$, $B'(e^{2ib})$ et $C'(e^{2ic})$, est équilatéral, donc son centre de gravité et le centre de son cercle circonscrit sont confondus, donc

$$e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0.$$

Indications

1 Penser à deux points fondamentaux :
- un complexe est un réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.
- les éléments de $\mathbb{U}$ ont leur conjugué égal à leur inverse.

2 La proposition à démontrer par récurrence est « $\forall(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$,

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|,$$

avec égalité si et seulement si il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que

$$z_2 = \lambda_2 z_1, \dots, z_n = \lambda_n z_1.$$

»

3 **1.** Revoir la méthode du cours (avec deux équations)
2. Écrire -1 sous forme exponentielle.
3. Idem que la question précédente.

4 **1.** pour la première somme, réécrire la somme en l'indexant sur k.
2. pour la deuxième, utiliser le binôme de Newton et intervertir les sommes.

5 **1.** Utiliser la technique de l'angle moitié.
2. Remarquer que 1 n'est pas racine, donc qu'on peut diviser par $(1-z)^5$, et ensuite montrer qu'on est ramenés à une équation du type $x^5 = 1$.

6 **1.** On utilisera les formules d'Euler et le binôme de Newton.
2. Démontrer que la propriété est vraie pour tout θ réel.
3. Utiliser la formule de récurrence ou l'expression de la question 1.

8 **1.** C'est du cours, chercher le point fixe !
2. Penser que l'alignement est lié à la colinéarité ! Ou bien que A, B, C sont alignés ssi $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel (et penser aux caractérisations des réels).
3. Idem

9 Ces calculs ont été faits en cours.

10 Penser à la quantité conjuguée quand il y a des fractions.

11 RAS

12 Appliquer l'inégalité triangulaire à $x = a + b$ et $y = a - b$.

13 Penser, comme dans l'exercice 1, que l'on connaît des conditions pour qu'un nombre soit réel.

?? Utiliser les fomrules d'addition, de duplication, etc.

?? **1.** Utiliser le fait que $\sin(\theta) = \mathfrak{Im}(e^{i\theta})$.
2. Utiliser les formules usuelles de trigonométrie.
3.

14 Faire une analyse synthèse, et montrer dans un premier temps que z est nécessairement de module 1.

15 **1.** (a) Montrer que $|z|^2$ est un entier naturel inversible.

(b) Démontrer qu'il y en a 4.

(c)

2. Tout est guidé dans cette question.

3. (a) Penser au fait qu'e si on connaît 2 points d'un carré, on connaît presque les deux autres.

(b) Penser que si ABC est un triangle équilatéral, alors C est l'image de B par une rotation de centre A.

?? Faire une preuve par récurrence et utiliser les formules d'addition des cosinus.

16 **1.** Il s'agit d'une simple équation du second degré.

2. Il faut déjà résoudre l'équation en $Z = z^3$, puis extraire des racines cubiques.

17 **1.** La première équation est une simple équation du second degré.

2. Pour cette équation, on peut développer, mais aussi se ramener à une recherche de racine cubique d'un certain complexe.

3. Procéder par analyse-synthèse, écrire z sous forme algébrique.

18 Que vaut la somme des termes d'une suite géométrique ?

19 Utiliser la technique de l'angle moitié et une des questions de cours du chapitre.

20 **1.** Attention au changement d'indices ! Poser $\ell = 2n - 1 - k$.

2. (a) Utiliser les racines $2n$-ièmes de l'unité.

(b) Utiliser la technique de l'angle moitié.

(c) Poser $P(z)$ le polynôme $(z+1)^{2n} - 1$, et déterminer le coefficient devant z dans ce polynôme.

(d)

21 **1.**

2. Démontrer que $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est primitive ssi k est premier avec n. On utlisera le théorème de Bézout.

22 **1.** Penser que ABC est isocèle en A ssi C est l'image de B par une certaine rotation...

2. Penser à l'argument d'un certain quotient.

3. Idem

4. Idem, attention aux calculs !

5. Penser que l'alignement se traduit par le gait qu'un quotient est réel.

6. Pour que O soit l'orthocentre du triangle formé par z, z^2 et z^3, il faut, si on appelle M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes z, z^2 et z^3, que (OM_1) soit perpendiculaire à (M_2M_3) et que (OM_2) soit perpendiculaire à (M_1M_3).

23 **1.** C'est du cours.

2. Idem !

24 Penser que l'orthogonalité s'exprime à l'aide d'un rapport !

25 Faire une analyse-synthèse.

26 Penser qu'un polygone régulier à n côtés est nécessairement paramétré par les racines n-ièmes de l'unité.

 nlaillet.math@gmail.com

27 Faire une analyse-synthèse pour montrer qu'il s'agit de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

28
1. **1.** Démontrer que les arguments des affixes de M et M' sont égaux.
2. **2.** Juste un calcul.
3. **3.** Partir de l'équation réelle d'un cercle, avec un module au carré, et écrire que $|z|^2 = z\overline{z}$. Pour la réciproque, trouver le centre et le rayon en résolvant un système.
4. **4.** Question pas évidente ! Si $b = 0$, montrer que l'image de Δ est Δ. Sinon, montrer que l'image de Δ est le cercle de centre $-\dfrac{ak}{b}$ et de rayon $\left|\dfrac{ak}{b}\right|$.
5. **5.** Montrer que si $\delta = 0$, on a une droite, sinon on a un cercle.

29
1. **1.** Question déjà faite !
2. **2.** Penser à $\mathbb{U}_n$.
3. **3.** (a) Penser au fait que $z\overline{z} = |z|^2$.
   (b) Utiliser l'inégalité triangulaire généralisée.
   (c)
   (d) Penser que l'inégalité permet de borner cette quantité et que le cas d'égalité indique quand le max est atteint.

30 Uniquement calculatoirement, cet exercice peut s'avérer très difficile. Voir comment cette égalité peut être interprétée d'un point de vue géométrique !