Soient θ un réel et n un entier naturel non nul.

1. factoriser $(z+1)^n - e^{2in\theta}$ pour $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$

1. Soit z dans $\mathbb{C}$.

• $(z+1)^n - e^{2in\theta} = 0 \iff (z+1)^n - (e^{i2\theta})^n = 0$

$\iff \left(\frac{z+1}{e^{i2\theta}}\right)^n - 1 = 0$

$\iff \frac{z+1}{e^{i2\theta}} \in \mathbb{U}_n$

• Pour $\omega \in \mathbb{U}_n$

$\frac{z+1}{e^{i2\theta}} = \omega \iff z = \omega e^{i2\theta} - 1$

• Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

$e^{i2\pi\frac{k}{n}} e^{i2\theta} - 1 = e^{i2(\theta + k\pi/n)} - 1$

$= i e^{i(\theta + k\pi/n)} \cdot 2\sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$

• La fonction polynôme $z \longmapsto (z+1)^n - e^{2in\theta}$ est de degré n, de coefficient dominant égal à 1, et admet les $\omega e^{i2\theta} - 1$, pour $\omega \in \mathbb{U}_n$, comme racines ; lesquels sont n racines distinctes. Donc

$$\boxed{(z+1)^n - e^{2in\theta} = 1 \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - i e^{i(\theta + k\pi/n)} \cdot 2\sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)\right)}$$

$$\left(= \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \left(z - (\omega e^{i2\theta} - 1)\right) \right)$$

2. Dans l'égalité de 1. je substitue θ à z, pour obtenir

$$1 - e^{i2n\theta} = A \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$$

où

$$A = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-i e^{i(\theta + k\pi/n)} \cdot 2\right)$$

$$= (-1)^n i^n 2^n e^{i\Theta}$$

où $\Theta = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\theta + k\frac{\pi}{n}\right)$

$$= n\theta + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$= n\theta + (n-1)\frac{\pi}{2}$$

Donc $A = 2^n (-1)^n i^n i^{n-1} (e^{i\theta})^n$

$$= 2^n (-1)^n (-1)^n i^{-1} (e^{i\theta})^n$$

$$= -i (e^{i\theta})^n 2^n$$

Or $1 - e^{i2n\theta} = -(e^{i2n\theta} - 1)$

$$= -i e^{in\theta} \cdot 2\sin(n\theta)$$

D'où $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}}$

On vérifie que cette formule est valable pour $n \in \{1 ; 2\}$:

$\sin(\theta) = \frac{\sin(1\theta)}{2^{1-1}}$ et $(\sin\theta)\left(\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sin(2\theta)}{2^{2-1}}$