MPSI1 – Programme de colles
Semaine 04 – du 7 au 11 octobre 2024

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

— *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*

— *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*

— *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\|z - z'\|$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \varphi)$.	
e) équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

Contenus	Capacités & Commentaires
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.	Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique de la conjugaison.	L'étude générale des similitudes est hors programme.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;*
- *la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;*
- *le calcul de dérivées et de primitives ;*
- *la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;*
- *l'application des deux points précédents aux équations différentielles.*

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f \rvert$ est majorée.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

Programme de cette colle : complexes et fonctions usuelles.

- complexes : tout y compris les équations de degré 2, les racines de l'unité, la géométrie
- fonctions usuelles : questions de cours seulement, définitions de base, transformation de graphes, dérivation. Le « bestiaire » des fonctions usuelles n'a pas été commencé.

Exemples de questions de cours

1. Caractérisation des réels avec le module, cas des réels positifs. Inégalité triangulaire sur les complexes, cas d'égalité.
2. Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.
3. Formule d'Euler et expression de $(\cos x)^n$ et de $(\sin x)^n$ comme combinaisons linéaires des $\cos(kx)$ et des $\sin(kx)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$. Formule de Moivre et expression de $\cos(nx)$ et de $\sin(nx)$ comme combinaisons linéaires des $\cos(x)^k$ et des $\sin(x)^k$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.
4. Etant donnée une fonction polynôme non nulle f à coefficients complexes, factorisation de $f(z) - f(a)$ par $(z - a)$. CNS pour que a soit une racine de f. Nombre de racines et factorisation (admis) ; somme et produit des racines si elles sont distinctes au nombre du degré de f (admis).
5. Description de $\mathbb{U}_n$ par extension et cardinal. Factorisation de $z^n - 1$. Écritures trigonométriques des racines n-ièmes de tout complexe w.
6. Calcul de $\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\theta + k\pi/n)$ par factorisation de $(z+1)^n - e^{i2n\theta}$.
7. Pour tout complexe w donné sous-forme trigonométrique, écriture trigonométrique d'une racine carrée de w de partie réelle strictement positive, ou de partie réelle nulle et de parmi imaginaire positive. Unicité d'une telle racine carrée.
8. Pour tout complexe w donné sous-forme algébrique, écritures algébriques des racines carrées de w.
9. Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation algébrique du second degré à coefficients complexes ; cas des coefficients réels et conjugaison des racines. Relations coefficients-racines.
10. Bijection réciproque de la composée de deux bijections. Image directe d'une partie par une fonction. Exemple de $\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto (2x+1)/(x-1)$.
11. Effets des transformations usuelles sur la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé ou orthogonal (translations, dilatations, symétries).
12. Bornitude d'une fonction réelle (de la variable réelle) et majoration de sa fonction valeur absolue.